34.ª OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA

Ronda Departamental – 3 de septiembre de 2022

***Nivel 3** (1.^{er}, 2.^{o} y 3.^{er} curso)*

RESPUESTAS

Para tener en cuenta:

- Los problemas de respuestas cortas (problemas 1 al 6) valen 1 punto cada uno.
- Los problemas de desarrollo (problemas 7 y 8) valen 3 puntos cada uno (2 por proceso y 1 punto por respuesta), en base a los criterios de corrección proporcionados. Para soluciones distintas a las propuestas, el jurado puede redactar otros criterios de corrección.
- No se quita puntos por no poner unidad de medida o poner unidad de medida incorrecta.

PROBLEMA	RESPUESTA
Problema 1	4 (para divisores naturales), u 8 (para divisores enteros)
Problema 2	5 000 000 ₲
Problema 3	5, 6, o 7 cajas grandes

PROBLEMA	RESPUESTA
Problema 4	$(24 - 6\pi)$ o aprox. 5,16
Problema 5	320 minutos o aprox.
Problema 6	7 pesadas

Problema 1

¿Cuántos cubos perfectos son divisores de 1000?

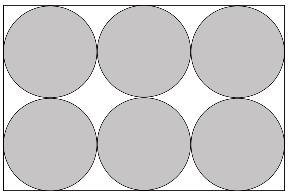
Problema 2

Don David quiere dividir un terreno rectangular de 200 m × 150 m en cuatro partes triangulares poniendo un cercado a lo largo de ambas diagonales del terreno. Si el cercado cuesta ₲ 10 000 el metro, ¿cuántos ₲ gastará?

Problema 3

René tiene varias cajas pequeñas, medianas y grandes. Él quiere distribuir 100 alfajores en la menor cantidad posible de cajas, y llenando totalmente cada caja que utiliza. En las pequeñas entran 7 alfajores, en las medianas 9 y en las grandes 11. ¿Cuántas cajas grandes usa?

Problema 4



Dentro de un rectángulo se dibujan círculos de radio 1 como se muestra en la figura. Calcula el área no sombreada del rectángulo.

Problema 5

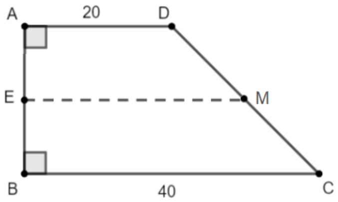
Hoy Xiomara y Yanina hicieron 100 animales de origami en 240 minutos. Mañana trabajarán con Zulema para hacer 200 animales. ¿Cuántos minutos tardarán en hacer los 200 animales, teniendo en cuenta que las tres trabajan a la misma velocidad?

Problema 6

Pedro tiene 2022 monedas, de las cuales 2021 pesan igual y una es más liviana. Usando una balanza de dos platos, Pedro dice que puede encontrar la moneda más liviana haciendo menos de 9 pesadas. ¿Cuál es la menor cantidad de pesadas que debe hacer Pedro para encontrar con seguridad la moneda más liviana?

sigue atrás…

Problema 7 (proceso 2 puntos, respuesta 1 punto)



Al trapecio rectángulo de la figura se le hace un corte horizontal, que lo divide en dos. Si $AB = AD$, $AE = BE$ y $EM = 30$, ¿cuál es el cociente entre el área del trapecio EMCB y el área del trapecio ADME?

Solución

Las áreas de los trapecios son la suma de la base mayor con la base menor, multiplicado por la altura, dividido dos. Luego, las áreas son:

$$(ADME) = (30 + 20) \cdot \frac{10}{2} = 250 \quad ; \quad (EMCB) = (40 + 30) \cdot \frac{10}{2} = 350$$

El cociente entre el área EMCB y el área ADME es:

$$\frac{350}{250} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

Respuesta: 7/5 o 5/7 o equivalente

Criterios:

- Por calcular el área del trapecio EMCB **(1 punto)**
- Por calcular el área del trapecio ADME **(1 punto)**
- Por calcular correctamente el cociente entre las áreas de los trapecios, sin importar el orden del dividendo y el divisor **(1 punto)**

Problema 8 (proceso 2 puntos, respuesta 1 punto)

Los enteros positivos m y n satisfacen $m(m + n - 1) + n(m + n) = 2022$, ¿cuál es el menor valor posible de m?

Solución 1

Aplicando la propiedad distributiva en el primer miembro: $m^2 + mn - m + mn + n^2 = 2022$

Agrupando los términos del trinomio cuadrado perfecto: $\left(m^2 + 2mn + n^2\right) - m = 2022$

Resolviendo el trinomio cuadrado perfecto: $(m + n)^2 - m = 2022$

Entonces, un cuadrado perfecto menos m es igual a 2022, por lo que tenemos que buscar los cuadrados perfectos mayores que 2022 y confirmar que los valores de m cumplan con la condición buscada. Estos cuadrados son:

Para $45^2 = 2025 \Rightarrow 2025 - m = 2022 \Rightarrow m = 3$

además si $(m + n)^2 = 45^2 \Rightarrow (3 + n) = 45 \Rightarrow n = 42$ cumple la condición del enunciado que dice que m y n son enteros positivos.

Para $46^2 = 2116 \Rightarrow 2116 - m = 2022 \Rightarrow m = 94$

además si $(m + n)^2 = 46^2 \Rightarrow (94 + n) = 46 \Rightarrow n = -48$ que no cumple la condición del enunciado, ya que n no es un entero positivo

Vemos que para cuadrados perfectos mayores el valor de m va aumentando, y el valor de n será negativo.

Por lo tanto, el único cuadrado perfecto que verifica la ecuación es 45^2, lo que implica que $m = 3$

Respuesta: 3

Criterios:

- Por aplicar la propiedad distributiva y factorizar el trinomio cuadrado perfecto **(1 punto)**
- Por encontrar el menor cuadrado perfecto mayor que 2022 **(1 punto)**
- Por calcular correctamente el valor de m **(1 punto)**

Solución 2

Aplicando la propiedad distributiva en el primer miembro: $m^2 + mn - m + mn + n^2 = 2022$

Agrupando los términos del trinomio cuadrado perfecto: $\left(m^2 + 2mn + n^2\right) - m = 2022$

Resolviendo el trinomio cuadrado perfecto: $(m + n)^2 - m = 2022$

Dado que m debe ser el menor número entero positivo posible, evaluando la ecuación para $m = 1, 2, 3,...$ tenemos:

Para $m = 1$: $(1 + n)^2 - 1 = 2022 \Rightarrow n^2 + 2n - 2022 = 0$

$n_1 = 43,978$; $n_2 = -45,978$, ningún valor de n es un entero positivo.

Para $m = 2$: $(2 + n)^2 - 2 = 2022 \Rightarrow n^2 + 4n - 2020 = 0$

$n_1 = 42,989$; $n_2 = -46,989$, ningún valor de n es un entero positivo.

Para $m = 3$: $(3 + n)^2 - 3 = 2022 \Rightarrow n^2 + 6n - 2016 = 0$

$n_1 = 42$; $n_2 = -48$, como n_1 es un entero positivo, se cumple la condición.

Entonces:

$$m = 3$$

Respuesta: 3

Criterios:

- Por aplicar la propiedad distributiva y factorizar el trinomio cuadrado perfecto **(1 punto)**
- Por demostrar que $m = 1$ y $m = 2$ no cumplen las condiciones del problema **(1 punto)**
- Por calcular correctamente el valor de m **(1 punto)**