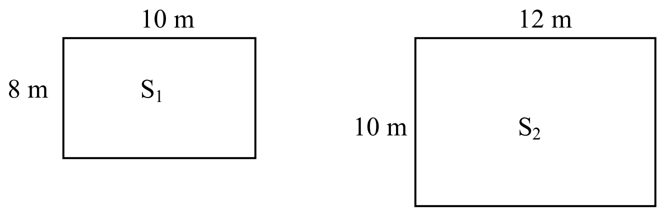
OLIMPÍADA NACIONAL 2001 - RONDA FINAL

1er. NIVEL

Problema 1

Laura tenía un jardín rectangular de 8m de ancho y 10m de largo. Si aumentó 2 metros el ancho de su jardín y 2m el largo, ¿en cuánto aumentó la superficie total?



$S_1 = 10\text{m} \times 8\text{ m} = 80\text{ m}^2$

$S_2 = 12\text{ m} \times 10\text{ m} = 120\text{ m}^2$

$\Delta S = 120\text{ m}^2 - 80\text{ m}^2 = \mathbf{40m^2}$

- Por determinar los lados del segundo rectángulo (1 punto)
- Por determinar S_1 (1 punto más)
- Por determinar S_2 (1 punto más)
- Por hallar ΔS (2 puntos más)

Problema 2

En un depósito hay muchas latas vacías de 4 colores: Rojo, Verde, Azul y Amarillo. Unos chicos juegan a armar torres en las cuales no hay dos latas del mismo color, con una lata en cada piso y con cualquier altura. ¿Cuántas torres distintas se pueden armar? Nota: dos torres son iguales si tienen la misma altura y los mismos colores en cada piso.

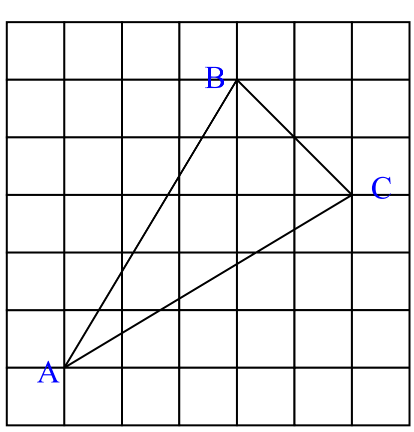
- Torres de 4 pisos : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- Torres de 3 pisos : $4 \times 3 \times 2 = 24$
- Torres de 2 pisos : $4 \times 3 = 12$
- Torres de 1 piso : $4 = 4$

64 maneras

- Por construir las torres de 4 pisos (hasta 2 puntos)
- Por completar las otras torres (3 puntos más)

Problema 3

El tablero cuadrado tiene un área de 441 cm^2. Hallar el área del triángulo ABC.



$\sqrt{441} = 21$

$21 \div 7 = 3$ cm mide el lado de cada cuadradito

$15 \times 15 = 225\text{ cm}^2$

$$225 - \frac{9\times15}{2} - \frac{6\times6}{2} - \frac{9\times15}{2} = \boxed{72\text{ cm}^2}$$

- Por sacar la raíz cuadrada (1 punto)
- Por hallar el lado de los cuadrados pequeños (1 punto más)
- Por hallar el área de los triángulos (2 puntos más)
- Por hallar (ABC) (1 punto más)

Problema 4

Luis, Mario y Raquel juegan a las cartas. Cada uno comienza a jugar con la misma cantidad de dinero. El que gana un juego lleva los ¼ del dinero que tiene cada uno de los otros dos jugadores.

Mario gana el primer juego, Luis gana el segundo y Raquel gana el tercero. Al ganar el tercer juego Raquel tiene 1.500 guaraníes. Determinar con cuánto dinero comenzaron a jugar cada uno de los tres.

	Inicio	1^{er} Juego	2^{o} juego	3^{er} juego
Luis	x	$\frac{3}{4}$ x	$\frac{21}{16}$ x	
Mario	x	$\frac{3}{2}$ x	$\frac{9}{8}$ x	
Raquel	x	$\frac{3}{4}$ x	$\frac{9}{16}$ x	$\frac{75}{64}$ x

$$\frac{75}{64}\,x = 1.500$$

x =1.280

- Por establecer la suma de cada jugador al cabo del primer juego (1 punto)
- Por establecer la suma de cada jugador al cabo del segundo juego (1 punto más)
- Por establecer la suma de cada jugador al cabo del tercer juego (1 punto más)
- Por determinar la suma inicial de cada jugador (2 puntos más)

2do. NIVEL

Problema 1

En “Ratolandia” se usan monedas de 37 Chis y 63 Chis. Mickey logró juntar 5.319 Chis con un total de 103 monedas. ¿Cuántas monedas de cada clase tiene?

Si todas las monedas fueran de 63 Chis se tendría $103 \times 63 = 6.489$

Pero como hay algunas monedas de 37 Chis , tiene 5.319. Entonces

$$1.489 - 5.319 = 1.170$$

La diferencia entre ambas monedas es

$$63 - 37 = 26$$

Luego: $1.170 \div 26 =$ **45 monedas de 37 Chis**

$103 - 45 =$ **58 monedas de 63 Chis**

- Por calcular el monto correspondiente a un solo tipo moneda (1 punto)
- Por determinar la diferencia de dinero (1 punto más)
- Por determinar la diferencia entre los dos tipos de moneda (1 punto más)
- Por determinar la cantidad de monedas de cada denominación (2 puntos más)

Si se resuelve por ecuación:

- Por plantear la o las ecuaciones (2 puntos)
- Por llegar a la solución (3 puntos más)

Problema 2

En un depósito hay muchas latas vacías de 4 colores: Rojo, Verde, Azul y Amarillo. Unos chicos juegan a armar torres en las cuales no hay dos latas del mismo color, con una lata en cada piso y con cualquier altura. ¿Cuántas torres distintas se pueden armar?

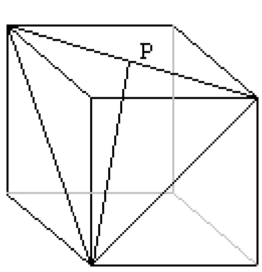
- Torres de 4 pisos : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- Torres de 3 pisos : $4 \times 3 \times 2 = 24$
- Torres de 2 pisos : $4 \times 3 = 12$
- Torres de 1 piso : $4 = 4$

64 maneras

- Por construir las torres de 4 pisos (hasta 2 puntos)
- Por completar las otras torres (3 puntos más)

Problema 3

El volumen de un cubo es $1.000 cm^3$. Si P es el punto medio de la diagonal de una cara, hallar la distancia de P a uno de los vértices de la cara opuesta.



$a^3 = 1.000 \text{ cm}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 10 \text{ cm}$

$\text{diagonal} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{2 \times 100} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$

$\text{distancia} = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{200 - 50} = \sqrt{150}$

distancia = $5\sqrt{6}$ cm

- Por hacer un dibujo de la situación (1 punto)
- Por calcular una diagonal (1 punto más)
- Por reconocer la existencia del triángulo equilátero (1 punto más)
- Por determinar la distancia (2 puntos más)

Problema 4
Si consideramos un reloj que funciona correctamente, ¿en cuántas posiciones coinciden las agujas del horario y del minutero? (ojo! piénsalo cuidadosamente!)

1. a las 12 en punto
2. entre la 1 y las 2
3. entre las 2 y las 3
4. entre las 3 y las 4
5. entre las 4 y las 5
6. entre las 5 y las 6
7. entre las 6 y las 7
8. entre las 7 y las 8
9. entre las 8 y las 9
10. entre las 9 y las 10
11. entre las 10 y las 11

en 11 posiciones

- Por responder una sola vez (1 punto)
- Por responder 12 veces (1 punto)
- Por la respuesta correcta (5 puntos)

3er. NIVEL

Problema 1

En un depósito hay muchas latas vacías de 4 colores: Rojo, Verde, Azul y Amarillo. Unos chicos juegan a armar torres en las cuales no hay dos latas del mismo color, con una lata en cada piso y con cualquier altura. ¿Cuántas torres distintas se pueden armar?

- Torres de 4 pisos : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- Torres de 3 pisos : $4 \times 3 \times 2 = 24$
- Torres de 2 pisos : $4 \times 3 = 12$
- Torres de 1 piso : $4 = 4$

64 maneras

- Por construir las torres de 4 pisos (hasta 2 puntos)
- Por completar las otras torres (3 puntos más)

Problema 2

Encontrar los cuatro menores números, de cuatro cifras, que cumplen la siguiente condición: al dividirlos por 2 ; 3 ; 4 ; 5 o 6 el resto es 1.

Llamamos q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 a los cocientes de las divisiones, entonces:

$$\begin{array}{l} N = 2q_1 + 1 \\ N = 3q_2 + 1 \\ N = 4q_3 + 1 \\ N = 5q_4 + 1 \\ N = 6q_5 + 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} N - 1 = 2q_1 \\ N - 1 = 3q_2 \\ N - 1 = 4q_3 \\ N - 1 = 5q_4 \\ N - 1 = 6q_5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} N - 1 \text{ es múltiplo de} \\ 2 , 3 , 4 , 5 \text{ y } 6 \end{array}$$

El mcm de 2 , 3 , 4 , 5 , 6 es 60 , entonces N - 1 es múltiplo de 60.
El primer múltiplo de 60 con 4 cifras es:

$$60 \times 17 = 1020 = N - 1$$

y los tres siguientes son:

$$60 \times 18 = 1080 = N - 1$$
$$60 \times 19 = 1140 = N - 1$$
$$60 \times 20 = 1200 = N - 1$$

entonces los valores de N buscados son:

1.021 ; 1.081 ; 1.141 ; 1.201

- Por establecer la condición $D = d \times c + r$ (1 punto)
- Por determinar que D – 1 es múltiplo de 60 (1 punto más)
- Por encontrar cualquier número que cumple la condición (1 punto más)
- Por encontrar los 4 números (2 puntos más)

Problema 3

Hallar un número de 10 cifras, en el cual ninguna cifra sea cero, que sea divisible por la suma de sus cifras.

Consideramos el número 1111111111 en el cual la suma de sus cifras es 10 pero que no es divisible por 10.
Como 10 es el producto de dos números primos 2 y 5 , el siguiente es

$$3 \times 5 = 15$$

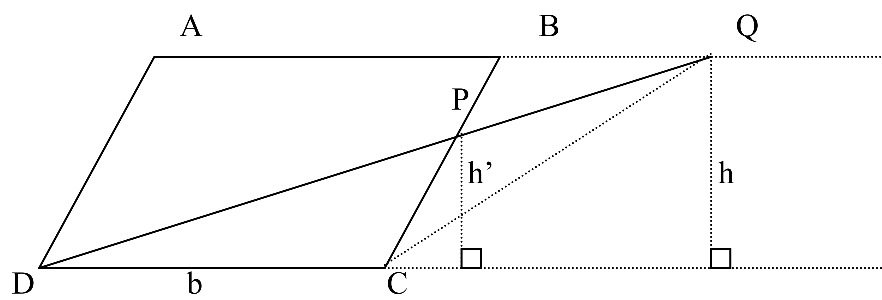
Si sustituimos el último 1 por 5 el número será divisible por 5 pero como la suma de sus cifras es 14 no será divisible por 3.
Entonces, si cualquiera de los otros 1 sustituimos por un 2 tendremos que la suma de sus cifras es 15 y se cumple las condiciones del problema.

Por ejemplo: 1111111125 ; 1211111115

- Por hacer exploraciones con números de 10 cifras (hasta 2 puntos)
- Por llegar a una solución (5 puntos)

Problema 4

En un paralelogramo ABCD de $60\ cm^2$ de superficie se traza por D una recta que corta a BC en P y a la prolongación de AB en Q.
Si el área del cuadrilátero ABPD es $46\ cm^2$, hallar el área del triángulo CPQ.



$$(DPC) = (ABCD) - (ABPD) = 60\ cm^2 - 46\ cm^2 = 14\ cm^2$$

$$(CPQ) = (DQC) - (DPC) = \frac{b \cdot h}{2} - 14\ cm^2 = \frac{60 cm^2}{2} - 14\ cm^2$$

$$(CPQ) = 30\ cm^2 - 14\ cm^2 = \mathbf{16\ cm^2}$$

- Por determinar (DPC) (2 puntos)
- Por determinar (CPQ) (3 puntos más)