CANGURO MATEMÁTICO 2003

Nivel Estudiante (6to. Curso)

Día 22 de marzo de 2003. Tiempo: 1 hora y 15 minutos

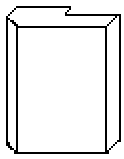
No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

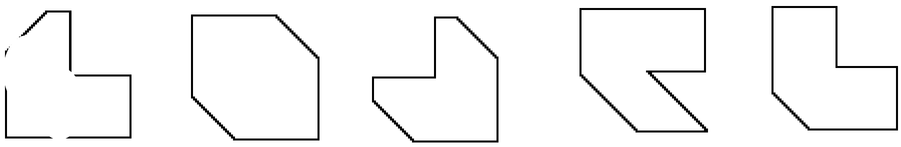
Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

1) Cuando iban a Rimini en tren, Lisa se hallaba en el séptimo vagón contado desde el principio del tren, y Marco se sentó, mas hacia adelante, en el sexto vagón contado desde el final del tren, con un vagón de separación entre ambos. ¿Cuántos vagones tenía el tren?

A) 15 B) 14 C) 13 D) menos de 13 E) no se puede determinar

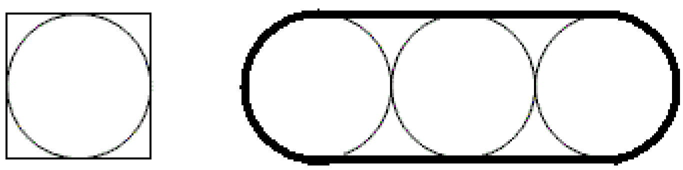
2) ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a la cara superior del sólido de la figura?





A) B) C) D) E)

3) El área del cuadrado de la figura es “a” y el área de cada uno de los círculos es “b”. ¿Cuál es el área de la región limitada por la línea gruesa?



A) 3b B) 2a+b C) a+2b D) 3a E) a+b

4) Alan estaba calculando el volumen de una esfera, pero en el cálculo utilizó, erróneamente, el valor del diámetro en lugar del radio de la esfera. ¿Qué debería hacer con el resultado para obtener la respuesta correcta?

A) Dividirlo por dos. B) Dividirlo por cuatro.
C) Dividirlo por seis. D) Dividirlo por ocho.
E) Dividirlo por dieciseis.

5) $2^{n + 2003} + 2^{n + 2003} =$

A) $2^{n + 2004}$ B) $2^{2n + 4006}$ C) $4^{2n + 4006}$ D) $4^{2n + 2003}$ E) $4^{n + 2003}$

6) ¿Cuál de los siguientes grupos de medidas determinan la existencia de un único triángulo ABC con esas medidas?

A) AB = 11cm, BC = 19cm, CA = 7cm
B) AB = 11cm, BC = 6cm, $\angle BAC = 63°$
C) AB = 11cm, CA = 7cm, $\angle CBA = 128°$
D) AB = 11cm, $\angle BAC = 63°$, $\angle CBA = 128°$
E) Ninguna de las anteriores.

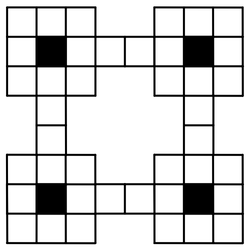
7) El promedio de estudiantes aceptados por un colegio en los cuatro años comprendidos entre 1999 y 2002 fue de 325 estudiantes por año. El promedio de estudiantes aceptados por el mismo colegio en los cinco años comprendidos entre 1999 y 2003 fue un 20% mayor. ¿Cuántos estudiantes aceptó este colegio en 2003?

A) 650 B) 600 C) 455
D) 390 E) 345

8) El conjunto de todos los valores del parámetro "m" para los cuales la curva $x^2 + y^2 = 1$ y la curva $y = x^2 + m$ tienen exactamente un punto común es:

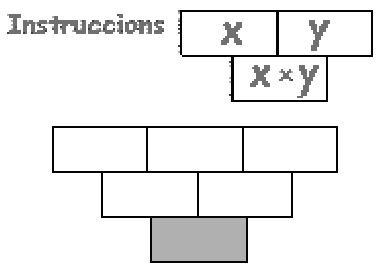
A) {-5/4, -1, 1} B) {-5/4, 1} C) {-1, 1} D) {-5/4} E) {1}

9) ¿De cuántas maneras se pueden cubrir completamente todos los cuadrados blancos de la figura con las usuales piezas de dominó 1 x 2?



A) 8 B) 16 C) 32
D) 64 E) 100

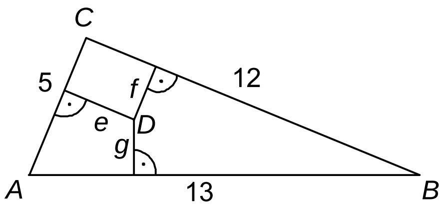
10) Construimos un triángulo numérico, con números enteros mayores que 1 en cada casilla, siguiendo las instrucciones que se muestran abajo. ¿Cuál de las alternativas dadas **no** puede ser colocada en la casilla sombreada?



A) 154 B) 100 C) 90 D) 88 E) 60

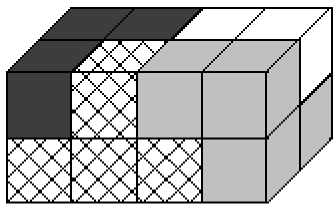
Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una.

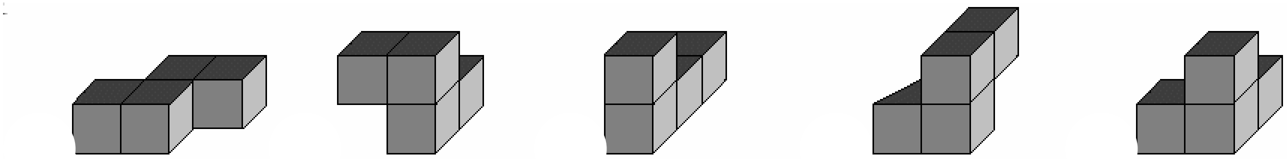
11) Sea *ABC* un triángulo de área 30. Sea *D* un punto de su interior y sean *e*, *f* y *g* las distancias de *D* a los lados del triángulo. ¿Cuál es el valor de la expresión $5e + 12f + 13g$?



A) 120 B) 90
C) 60 D) 30
E) No es posible determinar este valor sin conocer la ubicación exacta de *D*.

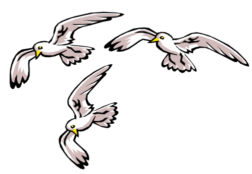
12) Un paralelepípedo rectangular está compuesto por 4 piezas y cada pieza, a su vez, está conformada por 4 pequeños cubos. ¿Cuál de las siguientes es la pieza formada por los cubos blancos?





A) B) C) D) E)

13) Dos garzas blancas y ocho garzas rojas estaban volando sobre un río. Repentinamente, todas ellas bajaron a la orilla, en forma aleatoria, formado una línea. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos garzas blancas hayan quedado una junto a la otra?



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{9}$

14) $\sqrt{1+2000\sqrt{1+2001\sqrt{1+2002\sqrt{1+2003\times 2005}}}} =$

A) 2000 B) 2001 C) 2002 D) 2003 E) 2004

15) 12, 13 y 15 son las longitudes (quizás no en ese orden) de dos lados de un triángulo acutángulo y la altura respecto al tercer lado de dicho triángulo. Halle el área del triángulo.

A) 168 B) 80 C) 84 D) $6\sqrt{65}$
E) el área no está determinada en forma única

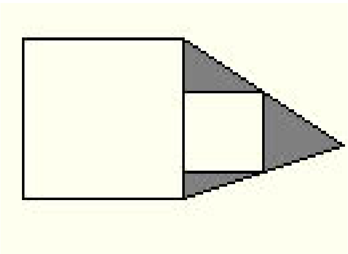
16) Una computadora está imprimiendo una lista de las séptimas potencias de todos los números enteros, es decir, la sucesión 1^7, 2^7, 3^7, ..., etc. ¿Cuántos términos de esta sucesión están entre los números 5^{21} y 2^{49}?

A) 13 B) 8 C) 5 D) 3 E) 2

17) Si sabemos que $10^n +1$ es un múltiplo de 101 y que *n* es un número de dos dígitos. ¿Cuál es el máximo valor posible de *n*?

A) 92 B) 94 C) 96 D) 98 E) 99

18) El diagrama muestra dos cuadrados: uno tiene 2 m de lado y el otro tiene 1m de lado. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



A) 1 m^2 B) 2 m^2 C) $2\sqrt{2}$ m^2 D) 4 m^2
E) Depende de la posición de los dos cuadrados

19) La suma $100^2-99^2+98^2-\ldots+2^2-1^2$ es igual a:

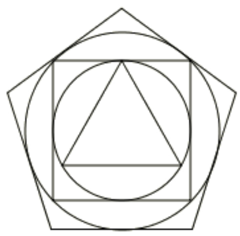
A) 2002 B) 2020 C) 4040 D) 5050 E) 8008

20) Si $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=6$ y a>0, entonces $a^3+\frac{1}{a^3}$ es igual a

A) $4\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) 6 D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{6}$

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una.

21) Se dibuja primero un triángulo equilátero. Luego, se dibuja el circuncírculo de este triángulo. Se circunscribe un cuadrado a este círculo. Después se dibuja otro circuncírculo, se circunscribe un pentágono regular a este círculo y así sucesivamente. Se repite esta construcción con nuevos círculos y nuevos polígonos regulares (cada uno con un lado más que el precedente) hasta que dibujemos el polígono regular de 16 lados. ¿Cuántas regiones disjuntas hay dentro del último polígono?



A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

22) Un punto $P(x, y)$ pertenece a un círculo con centro $M(2,2)$ y radio r. Si se sabe que $y = r > 2$ y x, y y r son todos enteros positivos, ¿cuál es el menor valor posible que puede tener x?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

23) Si $A > B > 1$ y B un entero positivo tal que A, B, $A - B$, $A + B$ son todos primos, entonces $S = A + B + (A - B) + (A + B)$ es

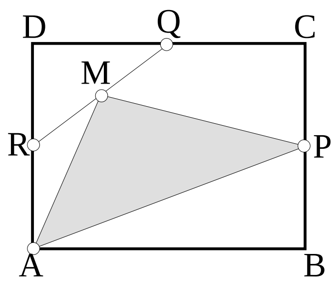
A) par B) un múltiplo de 3 C) un múltiplo de 5
D) un múltiplo de 7 E) primo

24) El gerente de una tienda tiene que decidir qué precio debe colocarle a unos suéteres. Un estudio de mercado le arroja los siguientes datos: Si el precio de cada suéter fuese \$75, entonces 100 adolescentes comprarán estos suéteres. Cada vez que el precio se incremente en \$5 entonces 20 adolescentes menos comprarán estos suéteres. Sin embargo, cada vez que al precio se le resten \$5, serán vendidos 20 suéteres más. Estos suéteres le cuestan a la compañía \$30 cada pieza. ¿Cuál es el precio de venta que proporcionaría las mayores ganancias?

A) \$85 B) \$80 C) \$75 D) \$70 E) \$65

25) En un rectángulo ABCD, sean P, Q y R los puntos medios de los lados BC, CD y AD, respectivamente, y sea M el punto medio del segmento QR. ¿Qué fracción del área de ABCD cubre el triángulo ΔAPM?

A) 1/4 B) 1/6 C) 3/8
D) 1/3 E) 5/16



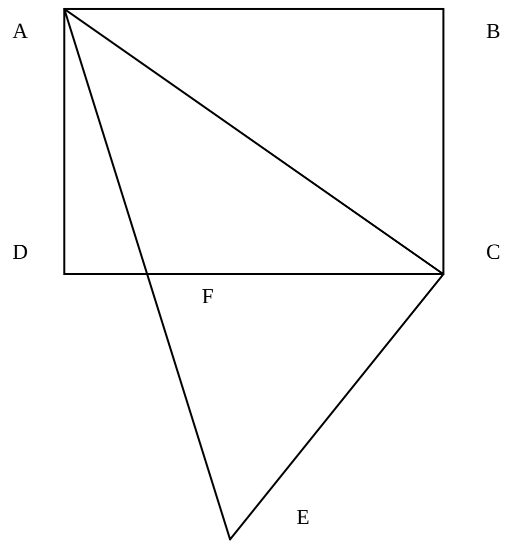
26) Una sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ es definida de la siguiente forma:

$a_0=4$
$a_1=6$
$a_{n+1}=(a_n)/(a_{n-1})$, $n\geq 1$.

Entonces a_{2003} es igual a:

A) 3/2 B) 2/3 C) 4 D) 1/4 E) 1/6

27) ABCD es un rectángulo con AB = 16, BC = 12. ACE es un triángulo rectángulo con AC $\perp$ CE tal que CE = 15. Si F es el punto de intersección de los segmentos AE y CD, entonces el área de ΔACF es igual a



A) 75 B) 80 C) 96
D) 72 E) 48

28) Pedro coloca una flecha en cada lado de un cubo, definiendo un vector. Luego, él procede a sumar todos los 12 vectores así obtenidos. ¿Cuántas sumas distintas de vectores podría obtener Pedro de esta forma (con todas las posibles elecciones)?

A) 25 B) 27 C) 64 D) 100 E) 125

29) Dados los 6 vértices de un hexágono regular y todos los segmentos que tienen por extremos a cualesquiera dos de estos vértices, llamaremos “forasteros” a dos de tales segmentos si ellos no tienen puntos comunes (incluso los extremos). ¿Cuántos pares de “forasteros” hay en el hexágono?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 34 E) 36

30) Sea f un polinomio tal que $f(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$. Determine $f(x^2 - 1)$.

A) $x^4 - 4x^2$ B) x^4 C) $x^4 + 4x^2 - 4$ D) $x^4 - 4$
E) Ninguna de las anteriores