

Nombre y Apellido:

Colegio: Grado: Sección:

Ciudad: Departamento:

Teléfono: E - mail:

Fecha de nacimiento: Cédula de Identidad:

PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.

Éxito y que te diviertas.

PROBLEMA 1

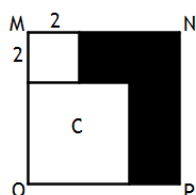
Eligio entrega a sus compañeras María y Eda, la siguiente lista de números: 1 , 3 , 4 , 6 , 8

María escribe los dos números mayores de tres dígitos, usando tres dígitos distintos de la lista, y suma los dos números.

Eda escribe los dos números menores de tres dígitos, también usando tres dígitos distintos de la lista, y suma los dos números. ¿Cuál es la diferencia entre las sumas?

PROBLEMA 2

Si tienes la siguiente lista de números: 1 , 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , 14 , 15; ¿de cuántas maneras puedes elegir dos números de la lista, para que la suma de esos dos números sea un número primo?



PROBLEMA 3

MNPQ es un cuadrado. El área del cuadrado C es 36.

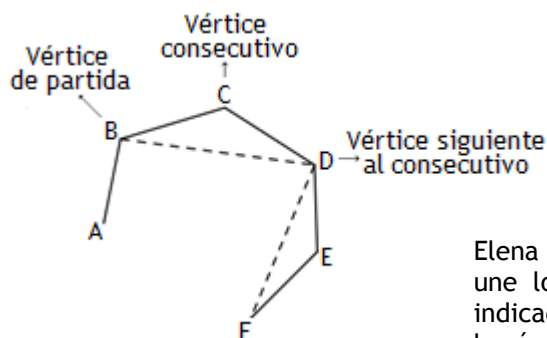
¿Cuánto mide la superficie que está pintada de negro?

PROBLEMA 4

A un número natural le llamamos “TODODIEZ” cuando la suma de sus cifras es 10; por ejemplo: 901 es un “TODODIEZ”.

Hallar todos los números “TODODIEZ”, menores que 1 300, que son el resultado de multiplicar dos números “TODODIEZ”.

PROBLEMA 5



Elena tiene trazados varios polígonos regulares. Elige uno de esos polígonos y une un *vértice de partida* con el siguiente al vértice consecutivo (ver gráfico).

Este vértice será el de partida para el siguiente trazado, y así sucesivamente, sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma diagonal.

Elena se detiene al llegar al primer vértice de partida. Por ejemplo, ella une los vértices de un pentágono regular siguiendo el procedimiento indicado, y obtiene una estrella de 5 puntas. Si hace lo mismo con un hexágono regular obtiene un triángulo.

¿Cuántas puntas tiene la estrella o cuántos lados tiene el polígono que se obtiene al repetir el procedimiento en un polígono regular de 100 lados?

Nombre y Apellido:

Colegio: Grado: Sección:

Ciudad: Departamento:

Teléfono: E - mail:

Fecha de nacimiento: Cédula de Identidad:

PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

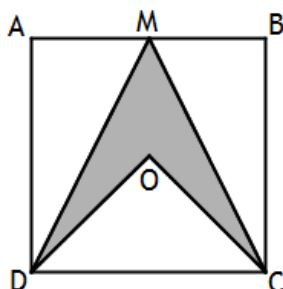
Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.

Éxito y que te diviertas.

PROBLEMA 1

Carmen debe calcular la suma de todos los divisores positivos del número 20. Osvaldo por su lado debe calcular la suma de todos los divisores positivos de 30. ¿Cuál es la diferencia entre las dos sumas?



PROBLEMA 2

El cuadrado ABCD de la figura tiene 20 cm de lado. M es el punto medio del lado AB y O es el centro del cuadrado. ¿Cuál es la medida de la superficie sombreada?

PROBLEMA 3

Daiana escribe una lista de 488 números naturales consecutivos, comenzando con 33. ¿Cuál es la suma de los 10 números que están en el centro de la lista?

PROBLEMA 4

En las mesas rectangulares de un restaurante pueden sentarse 3 personas a cada lado de la mesa y 1 en cada cabecera. ¿Cuál es la menor cantidad de mesas juntas, una pegada a la otra, que se necesitan para que se ubiquen 82 personas?

PROBLEMA 5

Vero tiene 2 014 piezas de cartón iguales y de forma rectangular, en las cuales la relación entre las dimensiones (ancho y largo) es $\frac{5}{6}$.

Vero quiere armar cuadrados con los cartones, cumpliendo las condiciones:

- Los cartones no deben superponerse.
- No debe quedar huecos entre los cartones.
- No debe desarmar los cuadrados ya armados.
- Todos los cuadrados armados deben ser diferentes.
- Los lados mayores de los cartones deben estar en posición horizontal.

¿Cuántos cartones le sobran?



26.ª OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

Nombre y Apellido:

Colegio: Curso: Sección:

Ciudad: Departamento:

Teléfono: E - mail:

Fecha de nacimiento: Cédula de Identidad:

PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.

Éxito y que te diviertas.

12 cm



PROBLEMA 1

En la figura se ve un cuadrado de 12 cm de lado. Irina dibuja otro cuadrado que tiene 8 cm más de perímetro que el cuadrado de la figura. ¿Cuál es el área del cuadrado que dibuja Irina?

PROBLEMA 2

Clau escribe todos los números naturales de cuatro dígitos (cifras) en los cuales el 3 y el 7 deben estar siempre juntos. ¿Cuántos dígitos escribe en total?

PROBLEMA 3

Juan elige un entero positivo de 5 dígitos. María borra el dígito de las unidades obteniendo un número de 4 dígitos. La suma de este número de 4 dígitos y el original de 5 dígitos es 52 713. ¿Cuánto puede valer la suma de los 5 dígitos del número original?

PROBLEMA 4

Nair y Yuli compiten en el siguiente juego:

1. Se tiene una ficha para mover en el casillero de 203 casillas:



2. Al inicio la ficha está en la casilla 1, contando de izquierda a derecha.
3. Nair comienza el juego.
4. Cada una de ellas, cuando llegue su turno, podrá mover la ficha 1, 2 ó 3 lugares, siempre hacia la derecha.
5. Gana el juego la que primero llega a la última casilla.

¿Qué estrategia tiene que utilizar Nair para asegurarse la victoria siempre?

PROBLEMA 5

Un triángulo ABC tiene su área $(ABC) = 92 \text{ cm}^2$. Calcular el área de otro triángulo cuyos lados tienen las mismas medidas que las medianas del triángulo ABC.



PROBLEMA 1

Eligio entrega a sus compañeras María y Eda, la siguiente lista de números:

1 , 3 , 4 , 6 , 8

María escribe los dos números mayores de tres dígitos, usando tres dígitos distintos de la lista, y suma los dos números.

Eda escribe los dos números menores de tres dígitos, también usando tres dígitos distintos de la lista, y suma los dos números.

¿Cuál es la diferencia entre las sumas?

Solución

Los números que escribe María son:

864 , 863

La suma es:

$$864 + 863 = 1\,727$$

Los números que escribe Eda son:

134 , 136

La suma es:

$$134 + 136 = 270$$

La diferencia buscada es:

$$1\,727 - 270 = 1\,457$$



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 1

Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

PROBLEMA 2

Si tienes la siguiente lista de números: 1 , 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , 14 , 15; ¿de cuántas maneras puedes elegir dos números de la lista, para que la suma de esos dos números sea un número primo?

Solución

Buscamos parejas de números cuya suma sea un número primo:

$$1 + 4 = 5$$

$$1 + 6 = 7$$

$$1 + 10 = 11$$

$$1 + 12 = 13$$

$$4 + 9 = 13$$

$$4 + 15 = 19$$

$$8 + 9 = 17$$

$$8 + 15 = 23$$

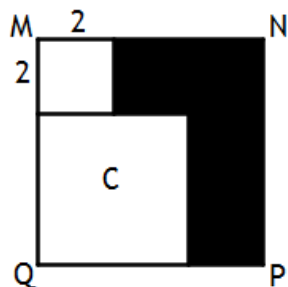
$$9 + 10 = 19$$

$$9 + 14 = 23$$

$$14 + 15 = 29$$

Hay 11 maneras

PROBLEMA 3



MNPQ es un cuadrado. El área del cuadrado C es 36.
¿Cuánto mide la superficie que está pintada de negro?

Solución 1

El lado del cuadrado C es:

$$\sqrt{36} = 6$$

El área el cuadrado pequeño es:

$$2 \times 2 = 4$$

El lado del cuadrado MNPQ es:

$$6 + 2 = 8$$

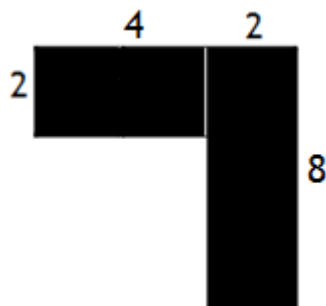
El área del cuadrado MNPQ es:

$$(MNPQ) = 8 \times 8 = 64$$

El área pintada de negro es:

$$64 - 36 - 4 = 24$$

Solución 2



Consideremos la parte pintada de negro.

El lado del cuadrado C es:

$$\sqrt{36} = 6$$

El lado del cuadrado MNPQ es:

$$6 + 2 = 8$$

Tenemos dos rectángulos. El área total es:

$$2 \times 4 + 2 \times 8 = 8 + 16 = 24$$



PROBLEMA 4

A un número natural le llamamos “TODODIEZ” cuando la suma de sus cifras es 10; por ejemplo: 901 es un “TODODIEZ”.

Hallar todos los números “TODODIEZ”, menores que 1 300, que son el resultado de multiplicar dos números “TODODIEZ”.

Solución

Hacemos una lista de los menores números “TODODIEZ”:

19 , 28 , 37 , 46 , 55 , 64 , 73 , 82 , 91 , 109 , 118 , 127 , ...

Ahora calculamos los productos:

$$19 \times 19 = 361$$

$$19 \times 28 = 532$$

$$19 \times 37 = 703$$

$$19 \times 46 = 874$$

$$19 \times 55 = 1\,045$$

$$19 \times 64 = 1\,216 < 1\,300$$

$$19 \times 73 = 1\,387 > 1\,300$$

$$28 \times 37 = 1\,036$$

$$28 \times 46 = 1\,288 < 1\,300$$

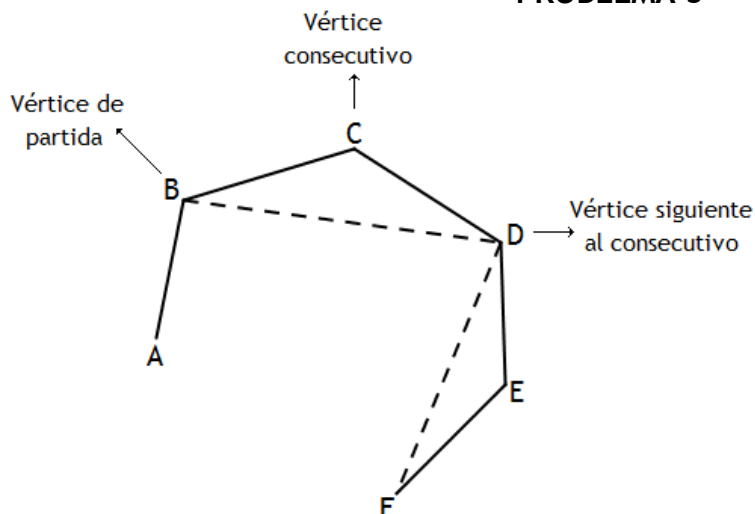
$$28 \times 55 = 1\,540 > 1\,300$$

$$37 \times 46 = 1\,702 > 1\,300$$

Los números son:

361 , 532 , 703 , 1 036 , 1 045 , 1 216

PROBLEMA 5



Elena tiene trazados varios polígonos regulares.

Elige uno de esos polígonos y une un *vértice de partida* con el siguiente al vértice consecutivo (ver gráfico).

Este vértice será el de partida para el siguiente trazado, y así sucesivamente, sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por la misma diagonal.

Elena se detiene al llegar al primer vértice de partida.

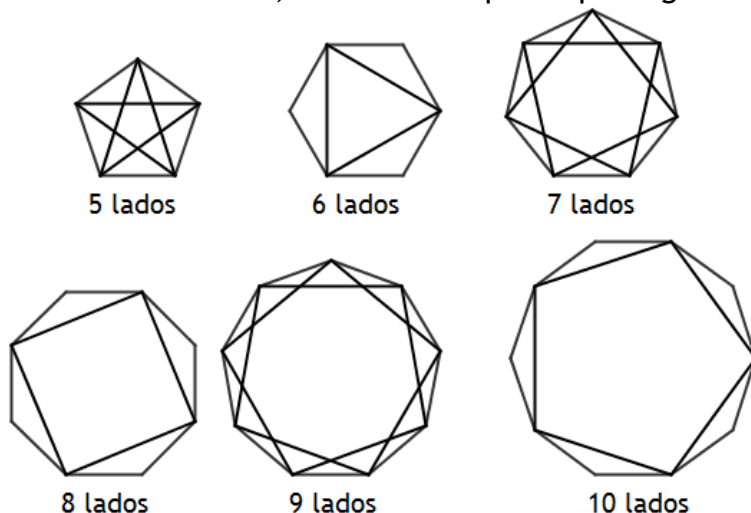
Por ejemplo, ella une los vértices de un pentágono regular siguiendo el procedimiento indicado, y obtiene una estrella de 5 puntas.

Si hace lo mismo con un hexágono regular obtiene un triángulo.

¿Cuántas puntas tiene la estrella o cuántos lados tiene el polígono que se obtiene al repetir el procedimiento en un polígono regular de 100 lados?

Solución

Analizamos casos más sencillos, comenzando por el pentágono:



Vemos que los polígonos con cantidad impar de lados producen estrellas con el mismo número de puntas como lados tiene el polígono. También en el centro de las estrellas aparece un polígono con el mismo número de lados que el polígono inicial.

Pero en el caso de polígonos con número par de lados se forman polígonos que tienen una cantidad de lados igual a la mitad de la cantidad de lados del polígono original.

Por lo tanto, en estas condiciones un polígono de 100 lados originará:

Un polígono de 50 lados



PROBLEMA 1

Carmen debe calcular la suma de todos los divisores positivos del número 20.
Osvaldo por su lado debe calcular la suma de todos los divisores positivos de 30.
¿Cuál es la diferencia entre las dos sumas?

Solución

El conjunto de los divisores positivos de 20 es:

$$D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

Y la suma es:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$$

El conjunto de los divisores positivos de 30 es:

$$D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

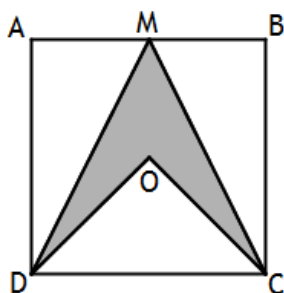
Y la suma es:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72$$

La diferencia buscada es:

$$72 - 42 = 30$$

PROBLEMA 2



El cuadrado ABCD de la figura tiene 20 cm de lado. M es el punto medio del lado AB y O es el centro del cuadrado.
¿Cuál es la medida de la superficie sombreada?

Solución 1

El lado del cuadrado es también la altura del triángulo DMC y la mitad del lado es la altura del triángulo DOC.

Escribimos una igualdad con las áreas correspondientes:

$$(DMCO) = (DMC) - (DOC)$$

Calculamos las áreas:

$$(DMCO) = \frac{20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2} - \frac{20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 200 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 = \mathbf{100 \text{ cm}^2}$$

Solución 2

Escribimos una igualdad con las áreas correspondientes:

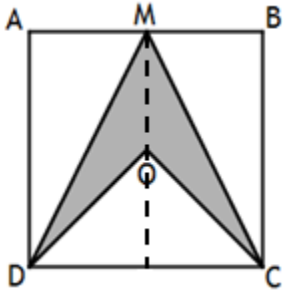
$$(DMCO) = (ABCD) - (DAM) - (MBC) - (DOC)$$

Como el lado del cuadrado mide 20 cm, tenemos:

$$(DMCO) = (20 \text{ cm})^2 - \frac{20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2} - \frac{10 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{2} - \frac{20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2}$$

$$(DMCO) = 400 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 - 100 \text{ cm}^2 = \mathbf{100 \text{ cm}^2}$$

Solución 3



El cuadrado ABCD de la figura tiene 20 cm de lado. M es el punto medio del lado AB y O es el centro del cuadrado.
¿Cuál es el área de la superficie sombreada?

Solución

Notamos que el área del cuadrilátero DMCO es el doble del área del triángulo DMO.

Por lo tanto, como (DMCO) es el doble de (DMO), por simetría con respecto al eje MO, tenemos:

$$(DMCO) = 2 (DMO) = 2 \cdot \left(\frac{MO \cdot AM}{2} \right) = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$



PROBLEMA 3

Daiana escribe una lista de 488 números naturales consecutivos, comenzando con 33.
¿Cuál es la suma de los 10 números que están en el centro de la lista?

Solución 1

El último número de la lista es:

$$33 + 487 = 520$$

La lista es:

$$33, 34, 35, 36, \dots, 517, 518, 519, 520$$

La suma de los términos que están en los extremos (nº 1 y nº 488) es igual a la suma de los términos que equidistan de los extremos, (por ejemplo el nº 2 y el nº 487, el nº 3 y el nº 486)

Por Gauss sabemos que, en el medio, hay 5 parejas que suman:

$$33 + 520 = 553$$

Entonces, la suma de los 10 números que están en el centro de la lista es:

$$553 \times 5 = 2\,765$$

Solución 2

La lista es:

33	34	35	36	47		...		?	?	?	?	?
1º	2º	3º	4º	5º				484º	485º	486º	487º	488º

Como no sabemos qué número hay que sumar a 33 para obtener el último número de los 488, vamos a hacer algunas consideraciones.

Escribo unas listas, pensando en que $488 \div 2 = 244$:

33 34 35 36 37 38 39 40 $\Rightarrow$ primeros 8 números de la lista

41 42 43 44 45 ... 236 237 238 239 240 $\Rightarrow$ 200 números más de la lista

241 242 243 244 ... 276 277 278 279 280 $\Rightarrow$ 40 números más de la lista

Ya tengo 248 números y necesito $488 \div 2 = 244$ números $\Rightarrow$ excluimos de esta mitad, los 4 últimos.

Entonces, la primera mitad de la lista es:

33	34	35	36	47		...		271	272	273	274	275	276
1º	2º	3º	4º	5º				239º	240º	241º	242º	243º	244º

Y la segunda mitad de la lista es:

277	278	279	280	281	282		...		?	?	?	?	?
245º	246º	247º	248º	249º	250º				484º	485º	486º	487º	488º

Ahora bien, si consideramos que desde el número 33 hay una cantidad par de números naturales consecutivos, podemos tener:

33 34 35 36, o bien

33 34 35 36 37 38, etc

O sea, si desde 33 tenemos 488 números naturales consecutivos, se observa que no habrá un único número central en la lista.

Entonces la suma pedida es la suma de los 5 últimos números de la primera mitad más los 5 primeros números de la segunda mitad.

$$272 + 273 + 274 + 275 + 276 + 277 + 278 + 279 + 280 + 281 = 2\ 765$$

PROBLEMA 4

En las mesas rectangulares de un restaurante pueden sentarse 3 personas a cada lado de la mesa y 1 en cada cabecera.

¿Cuál es la menor cantidad de mesas juntas, una pegada a la otra, que se necesitan para que se ubiquen 82 personas?

Interpretación 1

Todas las mesas están juntas.

En cada mesa aislada pueden sentarse 8 personas.

Para utilizar la menor cantidad posible de mesas, se tienen que unir por el lado más corto. De esta forma pierden su lugar 2 personas.

En las mesas de los extremos pueden sentarse 7 personas. Entonces:

$$82 - 7 \times 2 = 68$$

En las mesas del medio pueden sentarse, en cada una, 6 personas. Luego:

$$68 = 6 \times 11 + 2$$

Como sobran dos personas, se debe agregar una mesa más:

El total de mesas es:

$$11 + 2 + 1 = 14$$

Interpretación 2

TODA mesa está junto a otra.

En cada mesa aislada pueden sentarse 8 personas.

Para utilizar la menor cantidad de mesas, se tiene que unir por el lado más corto; de esta forma pierden su lugar 2 personas.

Como cada mesa está junto a otra ubicada de a dos, es la forma que menos lugares se pierde.

Al unir 2 mesas, cada par de mesas queda con 14 lugares, porque se perdieron 2 lugares, uno en cada cabecera de la mesa.

Luego vemos que:

$$1 \text{ par de mesas} \rightarrow 14 \times 1 = 14 \text{ personas}$$



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 2
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

2 pares de mesas $\rightarrow 14 \times 2 = 28$ personas

3 pares de mesas $\rightarrow 14 \times 3 = 42$ personas

4 pares de mesas $\rightarrow 14 \times 4 = 56$ personas

5 pares de mesas $\rightarrow 14 \times 5 = 70$ personas

6 pares de mesas $\rightarrow 14 \times 6 = 84$ personas

Con 6 pares de mesas ya hay más lugares de los que necesitamos, pero con 5 pares de mesas faltan lugares.

Como cada par de mesas se van a necesitar como mínimo:

$$6 \times 2 = 12 \text{ mesas}$$

PROBLEMA 5

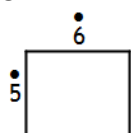
Vero tiene 2 014 piezas de cartón iguales y de forma rectangular, en las cuales la relación entre las dimensiones (ancho y largo) es $\frac{5}{6}$.

Vero quiere armar cuadrados con los cartones, cumpliendo las condiciones:

- Los cartones no deben superponerse.
- No debe quedar huecos entre los cartones.
- No debe desarmar los cuadrados ya armados.
- Todos los cuadrados armados deben ser diferentes.
- Los lados mayores de los cartones deben estar en posición horizontal.

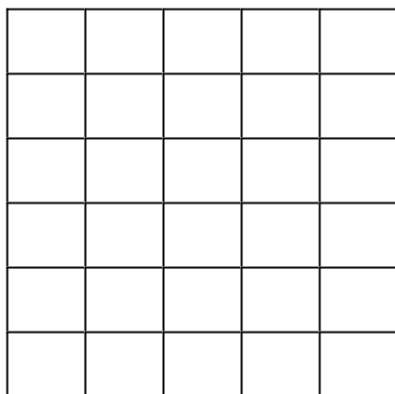
¿Cuántos cartones le sobran?

Solución



El rectángulo de la figura guarda, en sus dimensiones, lo establecido en el problema.

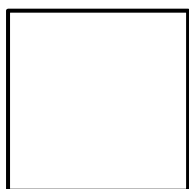
El primer cuadrado que se puede armar y que vamos a llamar cuadrado elemental es:



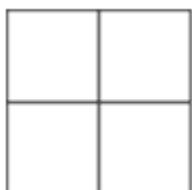
Este cuadrado tiene:

$$5 \times 6 \rightarrow 30 \text{ rectángulos}$$

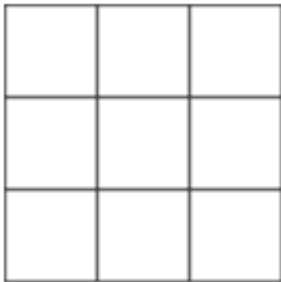
Cualquier cuadrado que pueda formarse tendrá como lado un múltiplo del cuadrado del lado del primer cuadrado al que llamaremos cuadrado elemental.



$$E \rightarrow 30 \text{ rectángulos}$$



$$2 \times 2E \rightarrow 2 \times 2 \times 30 = 120 \text{ rectángulos}$$

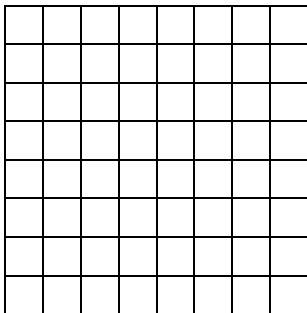


$$3 \times 3E \rightarrow 3 \times 3 \times 30 = 270 \text{ rectángulos}$$

...

...

...



$$8 \times 8E \rightarrow 8 \times 8 \times 30 = 1\,920 \text{ rectángulos}$$

Vero pudo formar cualquier combinación de estos cuadrados siempre que la cantidad de piezas de cartón sean suficientes.

Entonces, las combinaciones posibles sin dejar una cantidad suficiente de piezas para formar algún otro cuadrado distinto son:

- 1) {E, 2 x 2E, 3 x 3E, 4 x 4E, 5 x 5E} 1 650 rectángulos y sobran 364 piezas de cartón
- 2) {E, 2 x 2E, 3 x 3E, 4 x 4E, 6 x 6E} 1 980 rectángulos y sobran 34 piezas de cartón
- 3) {E, 2 x 2E, 3 x 3E, 7 x 7E} 1 890 rectángulos y sobran 124 piezas de cartón
- 4) {E, 2 x 2E, 5 x 5E, 6 x 6E} 1 980 rectángulos y sobran 34 piezas de cartón
- 5) {E, 4 x 4E, 7 x 7E} 1 980 rectángulos y sobran 34 piezas de cartón
- 6) {E, 8 x 8E} 1 950 rectángulos y sobran 64 piezas de cartón



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 2

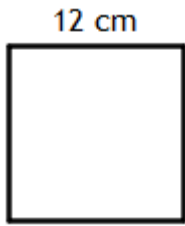
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

Estas combinaciones utilizan todos los rectángulos posibles en cada caso, es decir, si al armar los cuadrados “E” y “7 x 7E” se usan 1 500 rectángulos y aún sobran 514 con los cuales se pueden armar los cuadrados “2 x 2E” y “3 x 3E” (caso 3)) o el cuadrado “4 x 4E” (caso 5)).

El problema no establece estrictamente utilizar la mayor cantidad de rectángulos posibles por lo que cualquier combinación de cuadrados es válida. Estas combinaciones son subconjuntos de al menos dos elementos de los conjuntos del 1) al 6), pues se pide armar “cuadrados”. Por ejemplo, los subconjuntos de 3) son: {E, 2 x 2E}, {E, 3 x 3E}, {E, 7 x 7E}, {2 x 2E, 3 x 3E}, {2 x 2E, 7 x 7E}, {3 x 3E, 7 x 7E}, {E, 2 x 2E, 3 x 3E}, {E, 2 x 2E, 7 x 7E}, {E, 3 x 3E, 7 x 7E}, {2 x 2E, 3 x 3E, 7 x 7E}, para los cuales sobran 1 864, 1 714, 514, 1 624, 424, 274, 1 594, 394, 244 y 154 rectángulos de cartón respectivamente.

Siguiendo con este mismo análisis y descartando los casos en los que haya sobrado una misma cantidad de cartones, tenemos 43 soluciones posibles.

PROBLEMA 1



En la figura se ve un cuadrado de 12 cm de lado. Irina dibuja otro cuadrado que tiene 8 cm más de perímetro que el cuadrado de la figura. ¿Cuál es el área del cuadrado que dibuja Irina?

Solución

El perímetro del cuadrado es:

$$12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$$

El perímetro del cuadrado que dibuja Irina es:

$$48 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$$

El lado de ese cuadrado es:

$$56 \text{ cm} \div 4 = 14 \text{ cm}$$

Y el área es:

$$(14 \text{ cm})^2 = 196 \text{ cm}^2$$

PROBLEMA 2

Clau escribe todos los números naturales de cuatro dígitos (cifras) en los cuales el 3 y el 7 deben estar siempre juntos. ¿Cuántos dígitos escribe en total?

Situación 1

Cuando 3 y el 7 deben estar siempre juntos. Consideremos los siguientes casos:

I) Un 3 y un 7 la configuración es:

3 7 _ _

_ 3 7 _

_ _ 3 7

Los espacios deben estar ocupados por todos los dígitos diferentes de 3 y 7, y el 0 no como primer dígito. Por tanto tenemos:

- Para la primera configuración: $8 \times 8 = 64$ posibilidades
- Para la segunda configuración: $7 \times 8 = 56$ posibilidades
- Para la tercera configuración: $7 \times 8 = 56$ posibilidades

Total 176 posibilidades. Multiplicamos por dos porque el 7 puede cambiar de lugar con el 3:

$$176 \times 2 = 352$$

II) Dos 3 y un 7 la configuración es:

3 7 3 _

_ 3 7 3

Los espacios deben estar ocupados por todos los dígitos diferentes de 3 y 7, y el 0 no como primer dígito. Por tanto tenemos:

- Para la primera configuración: 8 posibilidades
- Para la segunda configuración: 7 posibilidades

Total 15 posibilidades. Multiplicamos por dos porque el 7 puede cambiar de lugar con el 3:

$$15 \times 2 = 30$$

III) Dos 3 y dos 7 la configuración es:

3 7 3 7

3 7 7 3



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

7 3 7 3

7 3 3 7

Total 4 posibilidades.

En total:

$$3\ 5\ 2 + 3\ 0 + 4 = 3\ 8\ 6$$

El total de dígitos es:

$$3\ 8\ 6 \times 4 = 1\ 5\ 4\ 4$$

Situación 2

Basta que un 3 y el 7 estén juntos. Consideremos los siguientes casos:

I) Un 3 y un 7 la configuración es:

3 7 _ _

_ 3 7 _

_ _ 3 7

Los espacios deben estar ocupados por todos los dígitos diferentes de 3 y 7, y el 0 no como primer dígito. Por tanto tenemos:

- Para la primera configuración: $8 \times 8 = 64$ posibilidades
- Para la segunda configuración: $7 \times 8 = 56$ posibilidades
- Para la tercera configuración: $7 \times 8 = 56$ posibilidades

Total 176 posibilidades. Multiplicamos por dos porque el 7 puede cambiar de lugar con el 3:

$$176 \times 2 = 352$$

II) Un 3 y dos 7 la configuración es:

3 7 _ _ (16 casos)

7 3 7 _ (8 casos)

_ 3 7 7 (7 casos)

7 3 _ 7 (8 casos)



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

$_ _ 3 _$ (23 casos), $8 + 7 + 8$

$_ _ 7 3$ (15 casos)

En total:

$$16 + 23 + 23 + 15 = 77$$

$$77 \times 2 = 154$$

III) Dos 3 y dos 7 la configuración es:

3 3 7 7

3 7 3 7

3 7 7 3

7 7 3 3

7 3 7 3

7 3 3 7

En total 6 posibilidades.

IV) Tres 3 y un 7 la configuración es:

3 3 3 7

7 3 3 3

3 7 3 3

3 3 7 3

En total 4 posibilidades:

$$4 \times 2 = 8$$

En total;

$$352 + 154 + 6 + 8 = 520$$

$$520 \times 4 = 2080$$



PROBLEMA 3

Juan elige un entero positivo de 5 dígitos. María borra el dígito de las unidades obteniendo un número de 4 dígitos. La suma de este número de 4 dígitos y el original de 5 dígitos es 52 713. ¿Cuál puede valer la suma de los 5 dígitos del número original?

Solución 1

$$\begin{array}{r} \text{A B C D E} \\ + \text{A B C D} \\ \hline 5 \text{ } 2 \text{ } 7 \text{ } 1 \text{ } 3 \end{array}$$

Vamos a escribir la suma como una operación encriptada:

El valor de A puede ser 4 o 5. Si $A = 5$, para obtener el 2 de $A + B$, B tiene que ser 7, pero eso transformaría el primer dígito en 6. Luego, el valor de A no puede ser 5.

Por lo tanto $A = 4$.

Como $4 + B = 12$, el valor de B tendría que ser 8, pero no es posible por la razón explicada anteriormente (hay que considerar las decenas que resultan al sumar).

Entonces $B = 7$. C tiene que ser 9 porque $9 + 8 = 17$.

D debe ser 2 pues $2 + 9 = 11$ y el valor de E es 1.

Verificamos que esos valores corresponden a la suma:

$$47\ 921 + 4\ 792 = 52\ 713$$

La suma pedida es:

$$4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23$$

Solución 2

$$\begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}$$

El primer entero positivo que elige Juan tiene 5 dígitos y lo colocamos como el sumando 'superior', el de más arriba.

El segundo sumando tiene 4 dígitos, "no tiene" el dígito de las unidades del primer sumando.

Encolumnamos los sumandos para sumarlos, y la suma es 52 713.

Debemos determinar qué dígitos van en los cuadraditos.

Comencemos por la suma de las unidades, que termina en 3.

Los pares de dígitos cuyas sumas terminan en 3 son:

$$\begin{aligned}
 0 + 3 &= 3 \\
 1 + 2 &= 3 \\
 2 + 1 &= 3 \\
 3 + 0 &= 3 \\
 4 + 9 &= 13 \\
 5 + 8 &= 13 \\
 6 + 7 &= 13 \\
 7 + 6 &= 13 \\
 8 + 5 &= 13 \\
 9 + 4 &= 13
 \end{aligned}$$

Comenzaremos probando la suma: $0 + 3$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 8 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 8 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 9 & 8 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline !! & 9 & 8 & 3 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 9 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}$$

Esta primera prueba, no nos permite obtener el 5, porque colocando el 3 donde está no dará por resultado 5. Luego, probamos con la siguiente suma: $1 + 2$

$$\begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & 9 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 9 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 7 & 9 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 7 & 9 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 7 & 9 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 9 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 9 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 9 & 2 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 5 \quad 2 \quad 7 \quad 1 \quad 3
 \end{array}$$

Vemos que con $1 + 2$, sí llegamos a la suma correcta 52 713.

Y la suma de los 5 dígitos del número original, 47 921 es:

$$4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23$$

Los otros pares no cumplen con la condición del problema de poder generar números que suman 52 713, como puede verse si continuamos con el tanteo:



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

Probando con el par $2 + 1 = 3$, veremos que no se llega al resultado esperado.

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square 2 \\ + \square\square\square 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square\square 1 2 \\ + \square\square\square 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square\square 1 2 \\ + \square\square 0 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square 0 1 2 \\ + \square\square 0 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square 0 1 2 \\ + \square 7 0 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square 7 0 1 2 \\ + 5 7 0 1 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array}$$

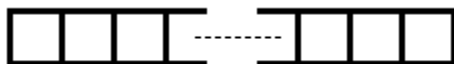
Y probando con el par $3 + 0$, tampoco se llega.

$$\begin{array}{r} \square\square\square\square 3 \\ + \square\square\square 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square\square 0 3 \\ + \square\square\square 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square\square 0 3 \\ + \square\square 1 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square 1 0 3 \\ + \square\square 1 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square\square 1 0 3 \\ + \square 6 1 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} \square 6 1 0 3 \\ + 6 6 1 0 \\ \hline 5 \ 2 \ 7 \ 1 \ 3 \end{array}$$

PROBLEMA 4

Nair y Yuli compiten en el siguiente juego:

1. Se tiene una ficha para mover en el casillero de 203 casillas:



2. Al inicio la ficha está en la casilla 1, contando de izquierda a derecha.
3. Nair comienza el juego.
4. Cada una de ellas, cuando llegue su turno, podrá mover la ficha 1, 2 ó 3 lugares, siempre hacia la derecha.
5. Gana el juego la que primero llega a la última casilla.

¿Qué estrategia tiene que utilizar Nair para asegurarse la victoria siempre?

Solución

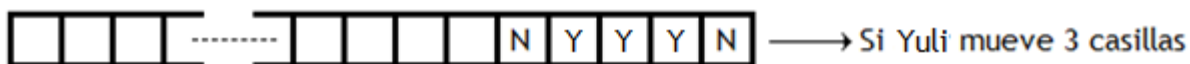
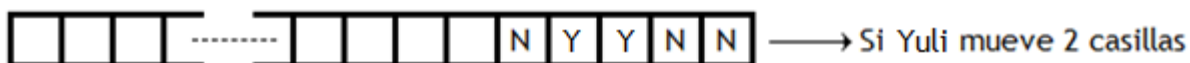
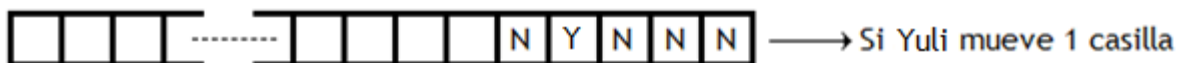
Nair tiene que asegurarse llegar a la casilla 203:



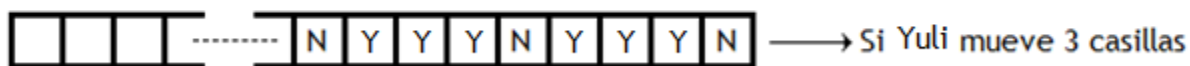
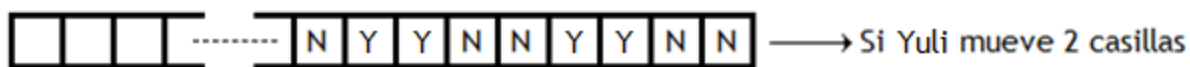
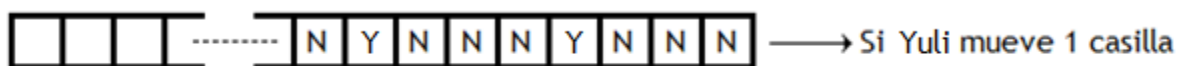
Para eso debe alcanzar la casilla 199:



Estando en la casilla 199, Nair jugará según el juego de Yuli:



Estando en la casilla 195, Nair jugará de la misma forma, o cualquiera de las combinaciones que se puedan dar entre las casillas 195 y 198, y las 4 últimas casillas:



Entonces, a Nair le conviene ocupar las casillas:

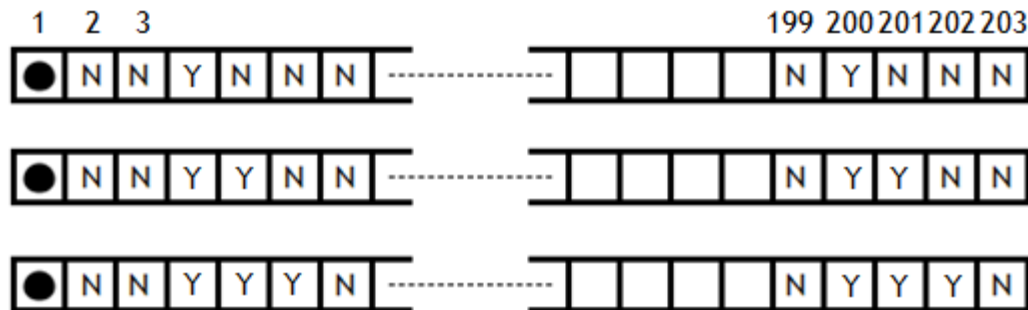
$$199, 195, 191, 187, \dots$$

Si 203 dividimos en grupos de 4 casillas, tenemos:

$$203 = 4 \times 50 + 3$$

Las tres casillas que sobran están al comienzo del juego. Veamos qué le conviene hacer a Nair.

La casilla 1 está ocupada por la ficha. Entonces:



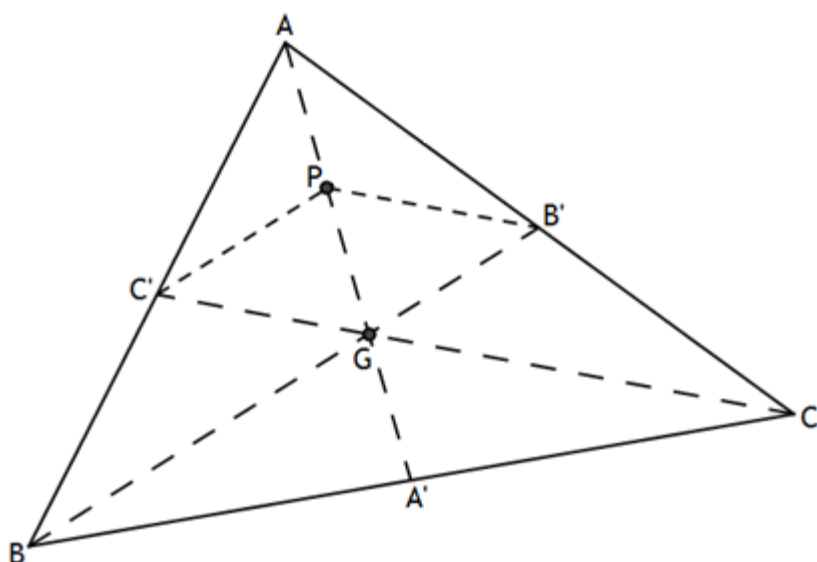
Vemos que Nair debe comenzar el juego moviendo dos casillas. Después de esa situación, quedan 200 casillas por delante, que se pueden dividir en 50 grupos de 4 casillas, con lo cual Nair se asegura ganar siempre.

Cuando Yuli hace su jugada, Nair mueve tantas casillas como faltan para completar 4.

PROBLEMA 5

Un triángulo ABC tiene su área $(ABC) = 92 \text{ cm}^2$. Calcular el área de otro triángulo cuyos lados tienen las mismas medidas que las medianas del triángulo ABC.

Solución 1



Sean AA' , BB' y CC' las medianas del triángulo ABC y G el baricentro.

Por C' , punto medio de AB, trazamos una paralela a BB' . Entonces resultará que en el triángulo ABG, P es punto medio del lado AG.

Ahora bien, considerando el triángulo ACG y trazando por B' , punto medio del lado AC, una paralela al lado CG; esta paralela pasará por P, punto medio del lado AG y su longitud es:

$$PB' = \frac{1}{2} CG = \frac{1}{3} CC'$$

Entonces, en el triángulo $PB'G$:

$$PB' = \frac{1}{3} CC' \quad ; \quad GB' = \frac{1}{3} BB' \quad ; \quad PG = \frac{1}{3} AA'$$

Entonces:

$$\frac{PG}{AA'} = \frac{GB'}{BB'} = \frac{PB'}{CC'} = \frac{1}{3}$$

Tenemos entonces que el triángulo $PB'G$ es semejante al triángulo que se formaría con las medianas del triángulo ABC, con razón 1 : 3.

Por lo tanto la relación entre las áreas es 1 : 9.

Como al trazar las tres medianas de un triángulo, estas lo dividen en 6 triángulos de igual área, se tiene:

$$(AGB') = \frac{1}{6} (ABC)$$

Los triángulos APB' y PGB' tienen iguales sus bases y sus alturas, y por lo tanto, sus áreas son iguales:



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

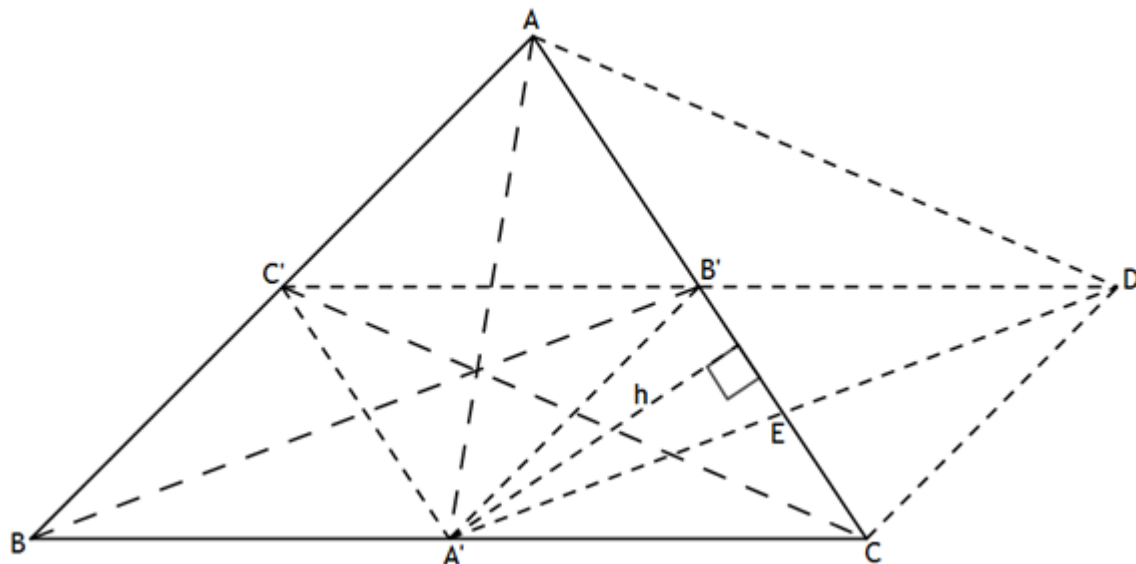
$$(PGB') = \frac{1}{12} (ABC) = \frac{1}{12} \cdot 92 \text{ cm}^2 = \frac{23}{3} \text{ cm}^2$$

El área del triángulo que se forma con las medianas del triángulo ABC tiene como área:

$$9 \cdot \frac{23}{3} \text{ cm}^2 = \mathbf{69 \text{ cm}^2}$$

Solución 2

En el triángulo ABC, las medianas son AA' , BB' , CC' .



Vamos a armar el triángulo formado por las medianas, sobre el triángulo ABC para facilitar la solución del problema.

Trazamos $A'D$ igual y paralela a BB' . El cuadrilátero $BB'DA'$ es un paralelogramo por tener dos lados opuestos iguales y paralelos (BB' y $A'D$).

Entonces, $BA' = y \parallel B'D$, por lo tanto, $A'C = y \parallel B'D$.

Luego, $A'B'DC$ es también un paralelogramo y el punto E es la intersección de sus diagonales.

Por lo tanto:

$$CE = EB' \quad \text{y} \quad A'E = ED$$

Por otro lado, $A'B'$ une los puntos medios A' y B' . Entonces:

$$A'B' = y \parallel C'A$$

Por lo tanto, el cuadrilátero $AC'A'B'$ es un paralelogramo y como $CD = y \parallel A'B'$, también el cuadrilátero $AC'D$ es un paralelogramo. Se cumple entonces que:

$$AD = y \parallel C'C$$

Todo esto hace que el triángulo $AA'D$ sea igual al triángulo que se construye con las medianas del triángulo ABC por tener todos sus lados iguales a ellas.

Relacionamos las áreas de los triángulos ABC y $AA'D$:

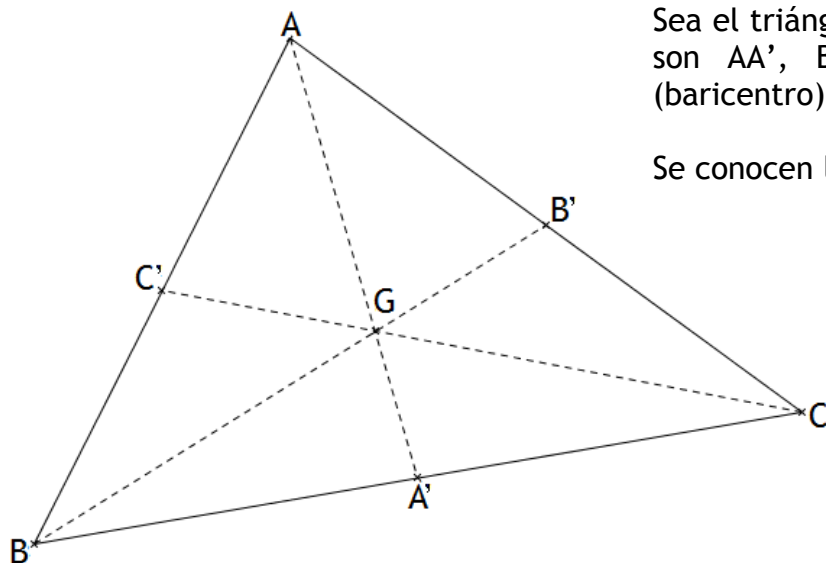


26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3
Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

$$\frac{(ABC)}{(AA'D)} = \frac{2 (AA'C)}{2 (AA'E)} = \frac{\frac{AC \cdot h}{2}}{\frac{AE \cdot h}{2}} = \frac{AC}{AE} = \frac{4 B'E}{3 B'E} = \frac{4}{3}$$

$$(AA'D) = \frac{3}{4} (ABC) \quad \Rightarrow \quad (AA'D) = 69 \text{ cm}^2$$

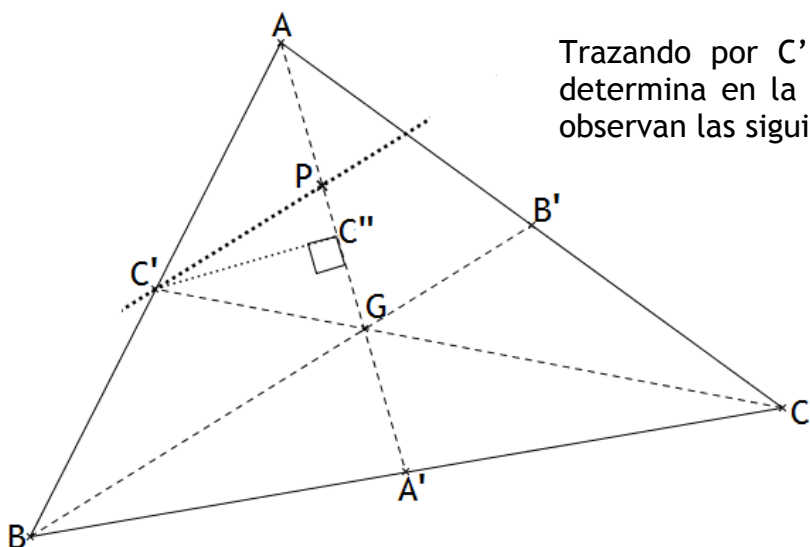
Solución 3



Sea el triángulo ABC cualquiera, cuyas medianas son AA' , BB' y CC' que se cortan en G (baricentro).

Se conocen las siguientes propiedades:

- 1) $A'G = \frac{1}{3} AA'$; $B'G = \frac{1}{3} BB'$; $C'G = \frac{1}{3} CC'$
- 2) $(AGB') = (AGC') = (BGA') = (BGC') = (CGA') = (CGB') = \frac{1}{6} (ABC)$



Trazando por C' un paralela a la mediana BB' , se determina en la mediana AA' un punto P, tal que se observan las siguientes propiedades:

- 3) En el triángulo ABG, $AP = PG$

$$4) C'P = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{3} BB'$$

De 3) se obtiene que $PG = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{3} AA'$

Por otro lado, considerando los triángulos $AC'P$ y $C'PG$:

$$(AC'P) = (C'PG) = \frac{1}{2} (AGC') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} (ABC) = \frac{1}{12} (ABC)$$



26.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL - NIVEL 3

Colegio Priv. Subv. San Roque González de Santa Cruz
Paraguarí, Paraguarí - 11 de octubre de 2014

Entonces, ambos triángulos tienen las bases iguales $AP = PG$ y la altura $C'C''$ común.

Luego tenemos que el triángulo formado por GC' , $C'P$ y GP , tiene como área $\frac{1}{12} ABC$ y que es semejante al triángulo formado por las medianas AA' , BB' y CC' , por tener sus lados proporcionales:

$$\frac{GP}{AA'} = \frac{C'P}{BB'} = \frac{GC'}{CC'} = \frac{1}{3}$$

Sabiendo que las áreas de dos triángulos son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos, los triángulos formados por las medianas, de vértices XYZ , resulta:

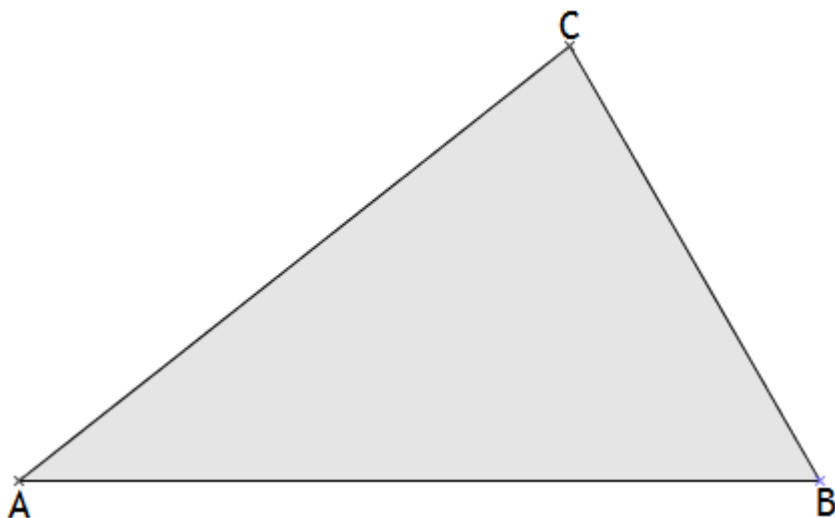
$$\frac{(C'GP)}{(XYZ)} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{12} (ABC)}{(XYZ)} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{12} \times 92}{(XYZ)} = \frac{1}{9}$$

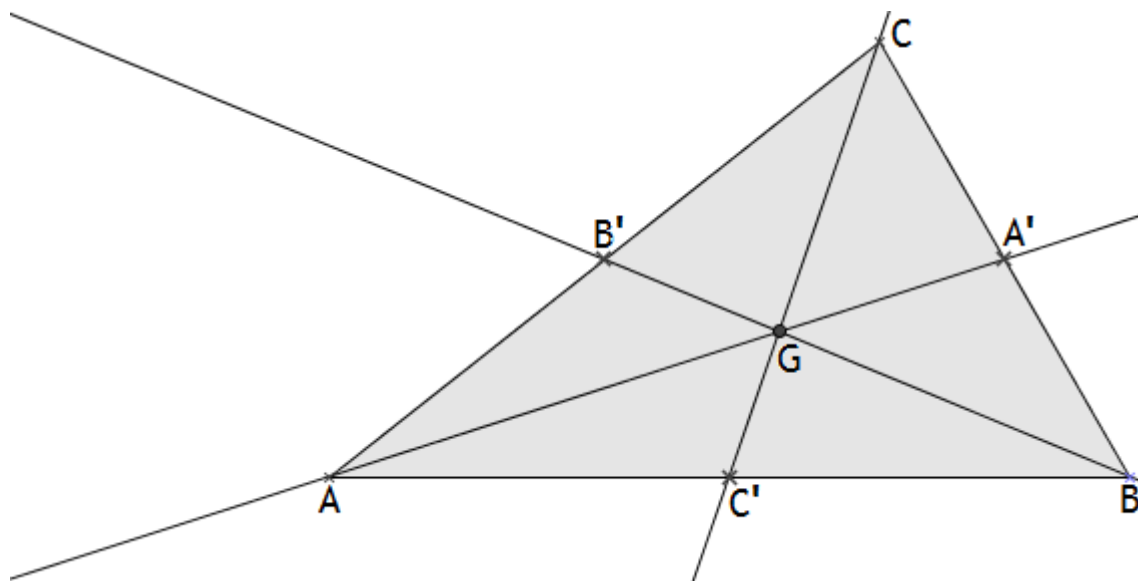
$$(XYZ) = 69 \text{ cm}^2$$

Solución 4

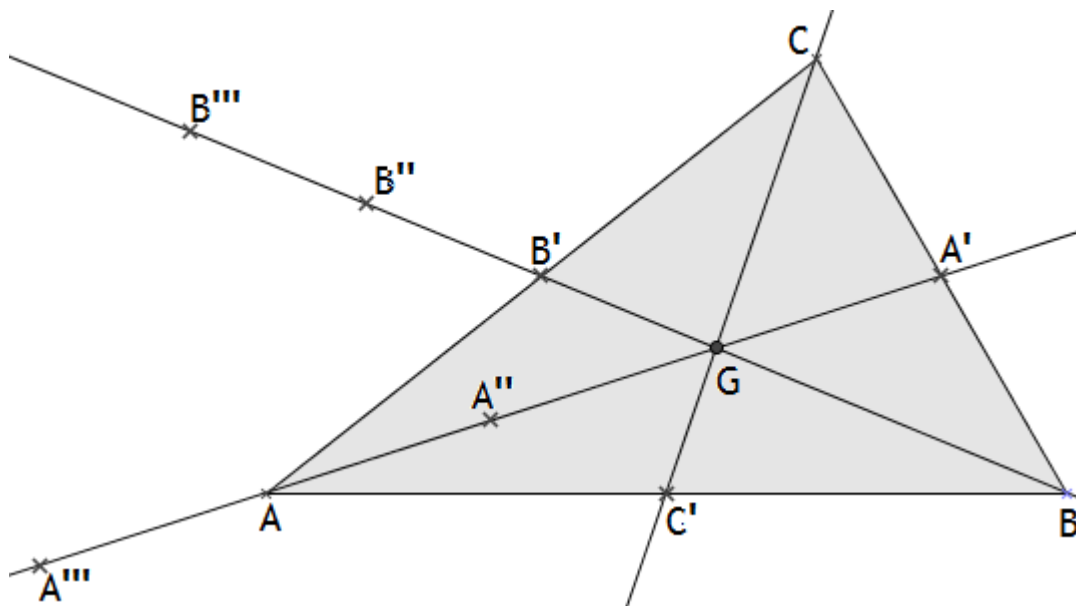


¿Cómo se puede construir el triángulo formado por las medianas del triángulo ABC, partiendo desde dicho triángulo?

En el triángulo ABC, se trazan las rectas que contienen a las medianas AA' , BB' y CC' . Concurren en G.



Sobre la recta BB' , desde G hacia B' , se toma tres veces el segmento GB' y sobre la recta AA' se toma tres veces el segmento GA' .

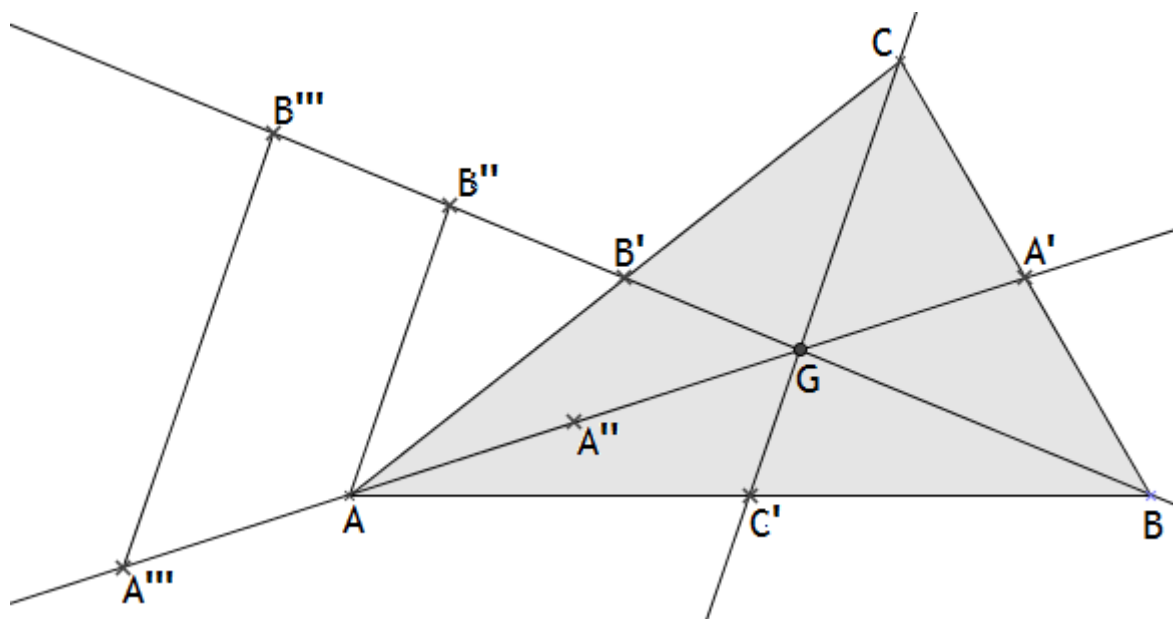


Se tiene entonces:

$$GA''' = AA' \text{ (una de las medianas del ABC)}$$

$$GB''' = BB' \text{ (otra de las medianas del ABC)}$$

Faltaría demostrar que $A'''B''' = CC'$ (la tercera mediana del ABC)



Veamos: los triángulos $AB'B''$ y CGB' tienen un ángulo igual (opuestos por el vértice) entre dos segmentos respectivamente iguales

$$GB' = B'B'' \quad \text{y} \quad AB' = CB'$$

Luego, ambos triángulos son iguales entre sí y sus lados y ángulos homólogos son iguales; con lo que:

$$AB'' = CG = \frac{2}{3} CC'$$

Además:

$$AB'' \parallel CG$$

Y por el “recíproco de Thales”:

$$A'''B''' \text{ y } AB'' \text{ son paralelas}$$

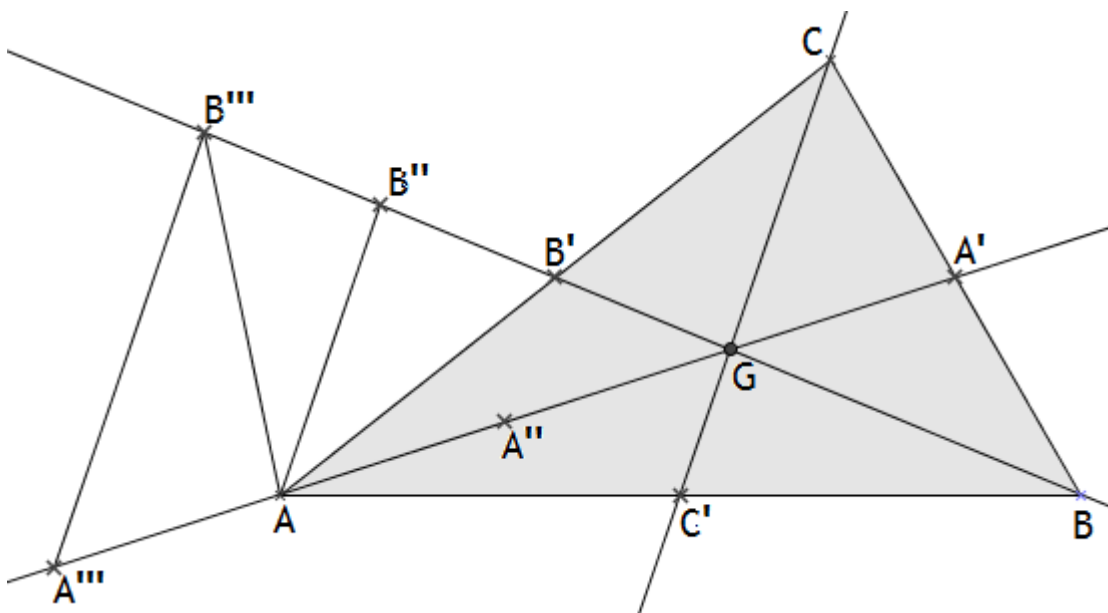
(Porque sus direcciones están determinadas respectivamente por los tercios de las medianas sobre cada segmento).

Ahora bien, los triángulos $AB''G$ y $A'''B'''G$ son semejantes entre sí, y de la proporcionalidad de sus lados homólogos se obtiene:

$$A'''B''' = CC'$$

Con lo que entonces, el triángulo $A'''B'''G$ es igual al triángulo formado por las tres medianas del triángulo ABC .

Ataquemos ahora la relación entre sus áreas.





Se sabe:

$$(AGB') = \frac{1}{6} (ABC)$$

Los triángulos AGB' , $AB'B''$ y $AB''B'''$ tienen las bases iguales y la altura común. Luego:

$$(AGB') = (AB'B'') = (ABB''') = \frac{1}{6} (ABC)$$

$$(AGB''') = 3 \times \frac{1}{6} (ABC)$$

$$(AGB''') = \frac{1}{2} (ABC)$$

Por otro lado, los triángulos $A'''B'''A$ y AGB''' tienen una altura común y la base del primer triángulo es la mitad de la del segundo triángulo, con lo que el

$$2(A'''B'''A) = (AGB''')$$

Con lo cual, se tiene finalmente:

$$(A'''AB''') + (AGB''') = \frac{1}{4} (ABC) + \frac{1}{2} (ABC) = \frac{3}{4} (ABC)$$

$$(A'''AB''') + (AGB''') = \frac{3}{4} (ABC) = \frac{3}{4} \times 92 \text{ cm}^2 = \mathbf{69 \text{ cm}^2}$$