25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 1
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

Nombre y Apellido:. . . . .

Colegio: . . . . **Grado:**. . . . . . . **Sección:** . . . . . .

Ciudad:. . . . . **Departamento:** . . . .

Teléfono: . . . . **E – mail:** . . . .

Fecha de nacimiento: . . . . **Cédula de Identidad:** . . . .

PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.
Éxito y que te diviertas.

PROBLEMA 1

¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

$$\frac{7}{8}\ ,\ \frac{66}{77}\ ,\ \frac{555}{666}\ ,\ \frac{4\,444}{5\,555}\ ,\ \frac{33\,333}{44\,444}$$

PROBLEMA 2

Con los dígitos 1 , 2 y 5 se forman números de cuatro cifras.
Los números formados son divisibles entre 3.
Los dígitos pueden estar repetidos o no.
¿Cuál es la mayor cantidad de números que se pueden formar?

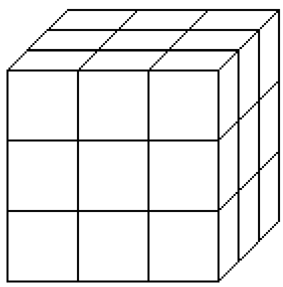
PROBLEMA 3

Enzo suma dos o más números naturales diferentes cuyo producto es 2 013. ¿Cuál es la mayor suma que puede obtener?

PROBLEMA 4

Una pelota de básquetbol tiene una circunferencia de 70 cm y la circunferencia del aro es 45 π cm.
¿Qué distancia hay entre el aro y la pelota, cuando el centro de la pelota pasa por el centro del aro?

PROBLEMA 5



Un cubo con 3 m de arista es pintado de gris utilizando 54 litros de pintura.
Luego, es cortado en pequeños cubos cada uno de ellos de 1 m de arista, y se desarma el cubo inicial.
¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar todas las caras de los cubitos que quedaron sin pintar?

25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 2
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

Nombre y Apellido:. . . . .

Colegio: . . . . **Grado:**. . . . . . . **Sección:** . . . . . .

Ciudad:. . . . . **Departamento:** . . . .

Teléfono: . . . . **E – mail:** . . . .

Fecha de nacimiento: . . . . **Cédula de Identidad:** . . . .

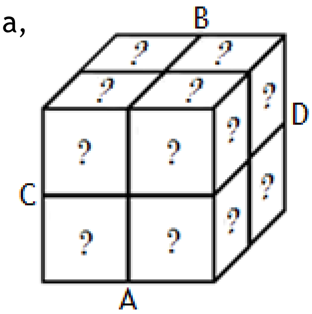
PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.
Éxito y que te diviertas.

PROBLEMA 1

Ocho dados como el que se muestra en la figura de la izquierda, forman un cubo.
En el plano que divide al cubo en dos partes pasando por AB, están las caras con 6 puntos.
En el plano que divide al cubo pasando por CD están las caras con 5 puntos.
¿Cómo quedan dispuestos los puntos de los dados en el cubo y cuál es la suma de los puntos de las caras externas?
Observación: la suma de los puntos de las caras opuestas es 7.



PROBLEMA 2

En un triángulo isósceles ABC, BA = BC y $ABC = 40°$. Se trazan las bisectrices de BAC y BCA que se cortan en D. Luego, se trazan las bisectrices de DAC y DCA, que se cortan en E. ¿Cuánto miden los ángulos internos del cuadrilátero ADCE?

PROBLEMA 3

Dos números enteros a y b, mayores que 0, cumplen con las siguientes condiciones:

- $a \cdot b$ no es divisible entre 3.
- $(a + b)^3 - (a^3 + b^3)$ es divisible entre 3^3

Hallar los tres mayores valores de (a + b) que tengan 5 dígitos.

PROBLEMA 4

Enzo halla todas las sumas de dos o más números enteros diferentes cuyo producto es 2 013. ¿Cuál es la menor suma que obtiene Enzo?

PROBLEMA 5

En un triángulo ABC, D es punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado AC. Se traza el segmento DE y se toma M punto medio de DE. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos DMB y MEC equivale a $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC.

omapa

25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 3
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

Nombre y Apellido:. . . . .

Colegio: . . . . **Curso:**. . . . . . . **Sección:** . . . . . .

Ciudad:. . . . . **Departamento:** . . . .

Teléfono: . . . . **E – mail:** . . . .

Fecha de nacimiento: . . . . **Cédula de Identidad:** . . . .

PROBLEMAS	PUNTOS
1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

Los dibujos *no están hechos a medida ni a escala*, por lo tanto no deben utilizarse para medirlos, sacar conclusiones y así tratar de encontrar la solución del problema.

Tienes 4 horas para resolver los problemas. Cada problema debe ser resuelto explicando por escrito, en forma detallada, todos los pasos seguidos para su resolución. No está permitido el uso de la calculadora. Los cálculos en la hoja auxiliar deben ser entregados.
Éxito y que te diviertas.

PROBLEMA 1

Hallar el resultado de la siguiente operación:

$$2\,013^2 + 2\,011^2 + \ldots + 5^2 + 3^2 - 2\,012^2 - 2\,010^2 - \ldots - 4^2 - 2^2$$

PROBLEMA 2

En un triángulo ABC de área 9, se determinan los puntos M y N, puntos medios de los lados AB y AC respectivamente.
Sea el punto P en el lado BC tal que $PC = \frac{1}{3}BC$. Sea O el punto de intersección de PN y CM.
Calcular el área del cuadrilátero BPOM.

PROBLEMA 3

Dividimos un número natural N, de k dígitos, entre 19 y obtenemos un residuo que es igual a $10^{k-2} - Q$, siendo Q el cociente y $Q < 101$. Además, $10^{k-2} - Q$ es mayor que 0. ¿Cuántos valores puede tener N?

PROBLEMA 4

Pedro y Juan compiten con el siguiente juego:
- Hay 2 montones de piedras con X piedras en un montón e Y en el otro ($X < 12$, $Y < 11$).
- Se puede sacar:
  - 1 piedra de uno de los montones, o
  - 2 piedras de uno de los montones, o
  - 1 piedra de cada montón, o
  - 2 piedras de un montón y 1 del otro.

Ningún jugador puede dejar de quitar cuando le toca jugar.
Pierde el jugador al que le toca quitar la última piedra.
Pedro es el primero en jugar y tiene una estrategia ganadora.
¿Cuáles son los tres máximos valores posibles de (X + Y)?

PROBLEMA 5

En un triángulo obtusángulo ABC, AB es el lado mayor.
Se traza la bisectriz del ángulo BAC y se trazan a ésta perpendiculares desde B y C, cuyos pies son P y Q respectivamente.
D es un punto de la recta BC tal que $AD \perp AP$.
Demostrar que las rectas AD, BQ y PC son concurrentes.

PROBLEMA 1

¿Cuál de las siguientes fracciones es mayor?

$$\frac{7}{8}\ ,\ \frac{66}{77}\ ,\ \frac{555}{666}\ ,\ \frac{4\,444}{5\,555}\ ,\ \frac{33\,333}{44\,444}$$

Solución 1

Simplificamos las fracciones:

$$\frac{66}{77} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{555}{666} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{4\,444}{5\,555} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{33\,333}{44\,444} = \frac{3}{4}$$

Si comparamos $\frac{7}{8}$ con $\frac{6}{7}$, hallando las fracciones equivalentes con igual denominador tenemos:

$$\frac{7}{8} = \frac{49}{56}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{48}{56}$$

Entonces:

$$\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$$

Si realizamos el mismo procedimiento con todas las fracciones, obtendremos:

$$\frac{7}{8} > \frac{6}{7} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

La fracción mayor es $\mathbf{\frac{7}{8}}$.

Solución 2
Simplificamos las fracciones:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{66}{77} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{555}{666} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{4\,444}{5\,555} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{33\,333}{44\,444} = \frac{3}{4}$$

Consideramos lo que a cada fracción le falta para alcanzar el valor 1 y tenemos:

$$\frac{7}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{6}{7} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}$$

Si comparamos dos fracciones, a la fracción mayor le falta menos para alcanzar el valor 1. Entonces:

$$\frac{7}{8} > \frac{6}{7} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5} > \frac{3}{4}$$

Criterios de corrección

• Simplificar fracciones	3 puntos
• Comparar fracciones	3 puntos
• Resultado	1 punto

Observación: estos puntos NO SON acumulables con los anteriores:

• Calcular correctamente 3 cocientes	1 punto
• Calcular correctamente 4 cocientes	2 puntos
• Calcular correctamente 5 cocientes	3 puntos

• Comparar cocientes	3 puntos
• Resultado	1 punto

PROBLEMA 2

Con los dígitos 1 , 2 y 5 se forman números de cuatro cifras.
Los números formados son divisibles entre 3.
Los dígitos pueden estar repetidos o no.
¿Cuál es la mayor cantidad de números que se pueden formar?

Solución
Para que un número sea divisible entre 3, la suma de los dígitos que forman el número debe ser múltiplo de 3. Veamos las posibilidades:

1) Para que la suma sea 3 (no hay posibilidades)

2) Para que la suma sea 6: 1 + 1 + 2 + 2 = 6

Los números son: 1122 , 1212 , 1221 , 2112 , 2121 , 2211 (6 números)

3) Para que la suma sea 9: 1 + 1 + 2 + 5 = 9

Los números son: 1125 , 1152 , 1215 , 1251 , 1512 , 1521 , 2115 , 2151 ,
2511 , 5112 , 5121 , 5211 (12 números)

4) Para que la suma sea 12: 1 + 1 + 5 + 5 = 12

Los números son: 1155 , 1515 , 1551 , 5115 , 5151 , 5511 (6 números)

5) Para que la suma sea 15 (no hay posibilidades)

6) Para que la suma sea 18 (no hay posibilidades)

Como la máxima suma posible es 20 (5 + 5 + 5 + 5), la búsqueda termina.

La mayor cantidad de números que se forman es:

6 + 12 + 6 = **24**

Criterios de corrección

- Analizar las sumas posibles que son múltiplos de 3 — 2 puntos
- Indicar que la suma de dígitos iguales a 3 , 15 y 18 no son posibles — 1 punto
- Hallar números que suman 6 — 1 punto
- Hallar números que suman 9 — 2 puntos
- Hallar números que suman 12 — 1 punto

- Indicar algún tipo de orden — 1 punto
- Por cada 4 números hallados al azar — 1 punto

PROBLEMA 3

Enzo suma dos o más números naturales diferentes cuyo producto es 2 013. ¿Cuál es la mayor suma que puede obtener?

Solución 1
Consideramos los divisores no compuestos de 2 013:

1 , 3 , 11 , 61

Notemos que 1 × 2 013 = 2 013 y la suma de divisores es: 1 + 2 013 = 2 014. Vamos a justificar que ésta es la mayor suma posible.

Si consideráramos divisores más pequeños que 2 013, que multiplicados den 2 013, cada término de la suma quedaría reducido considerablemente.

Por ejemplo, el divisor propio más grande de 2 013 es 671 (o sea, el mayor divisor de 2 013 que no sea 2 013 mismo). Al reemplazar 2 013 por 671 en la suma de divisores se disminuye 2 013 – 671 = 1 342. Esta disminución es irrecuperable con la suma de los otros divisores.

Si consideramos divisores aún menores, se aplica el mismo razonamiento.

La suma mayor es: **2 014**

Criterios de corrección

- Hallar todos los divisores no compuestos de 2 013 — 2 puntos
- Por determinar que 1 y 2 013 dan la suma mayor — 3 puntos
- Por justificar que no hay otra suma mayor — 2 puntos

Solución 2
Consideramos los divisores no compuestos de 2 013:

$$1 \ , 3 \ , 11 \ , 61$$

(Los divisores compuestos serán considerados en el proceso de solución).

El producto de dos o más de esos divisores da un número que es también divisor de 2 013.

Entonces:

$$1 + 3 + 11 + 61 = 76$$

$$1 + 3 + 11 \times 61 = 675$$

$$1 + 11 + 3 \times 61 = 195$$

$$1 + 3 \times 11 + 61 = 95$$

$$1 \times 3 + 11 + 61 = 3 + 1 \times 11 + 61 = 3 + 11 + 1 \times 61 = 75$$

$$1 + 3 \times 11 \times 61 = 2\,014$$

$$3 + 1 \times 11 \times 61 = 674$$

$$11 + 1 \times 3 \times 61 = 194$$

$$1 \times 3 \times 11 + 61 = 94$$

La mayor suma es: **2 014**

Criterios de corrección

- Hallar todos los divisores no compuestos de 2 013 — 3 puntos
- Por cada 3 combinaciones de acuerdo al enunciado (por cada 3 combinaciones, 1 punto) — 3 puntos
- Indicar el resultado — 1 punto

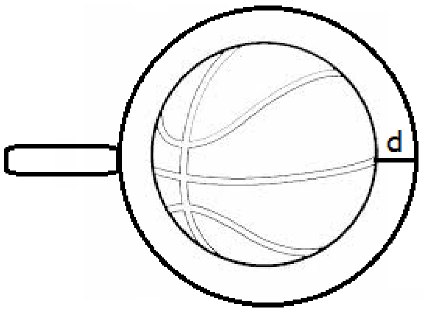
- Hallar divisores de 2 013 (compuestos y no compuestos) — 3 puntos
- Hallar todas las combinaciones de acuerdo al enunciado — 3 puntos
- Indicar el resultado — 1 punto

25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 1
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

PROBLEMA 4

Una pelota de básquetbol tiene una circunferencia de 70 cm y la circunferencia del aro es 45 π cm. ¿Qué distancia hay entre el aro y la pelota, cuando el centro de la pelota pasa por el centro del aro?

Solución



Cuando el centro de la pelota coincide con el centro el aro, la diferencia entre los radios nos dará la medida de d.

Entonces:

$$45\,\pi \text{ cm} = 2\,\pi\, R_{ARO} \quad \Rightarrow \quad R_{ARO} = \frac{45}{2}\text{ cm} = 22{,}5 \text{ cm}$$

$$70 \text{ cm} = 2\,\pi\, R_{PELOTA} \quad \Rightarrow \quad R_{PELOTA} = \frac{35}{\pi}\text{ cm} \cong 11{,}15 \text{ cm}$$

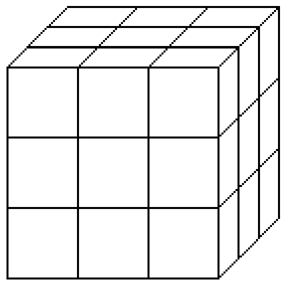
$$d = R_{ARO} - R_{PELOTA}$$

$$d = \frac{45}{2}\text{ cm} - \frac{35}{\pi}\text{ cm} = \left(\frac{45}{2} - \frac{35}{\pi}\right)\text{ cm} \cong 11{,}35 \text{ cm}$$

Criterios de corrección

- Relacionar la distancia pedida con los radios — 2 puntos
- Hallar el radio de la pelota — 2 puntos
- Hallar el radio del aro — 2 puntos
- Dar la respuesta — 1 punto

PROBLEMA 5



Un cubo con 3 m de arista es pintado de gris utilizando 54 litros de pintura.
Luego, es cortado en pequeños cubos cada uno de ellos de 1 m de arista, y se desarma el cubo inicial.
¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar todas las caras de los cubitos que quedaron sin pintar?

Solución
Los cubos de las esquinas tienen tres caras pintadas, los que están sobre las aristas en el medio dos caras pintadas, los que están en el medio de las caras una cara pintada y el cubo que está en el centro del cuerpo, ninguna cara pintada.

Resumiendo:

Con 3 caras pintadas	$\rightarrow$	8 cubitos
Con 2 caras pintadas	$\rightarrow$	12 cubitos
Con 1 cara pintada	$\rightarrow$	6 cubitos
Con ninguna cara pintada	$\rightarrow$	1 cubito

La cantidad de caras pintadas es:

$$8 \times 3 + 12 \times 2 + 6 \times 1 = 54$$

La cantidad de pintura que se usa para cada cara es:

$$54 \text{ litros} \div 54 = 1 \text{ litro}$$

Al desarmar, la cantidad de cubos que quedan es:

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

Por lo que la cantidad total de caras, pintadas o no, es:

$$27 \times 6 = 162$$

La cantidad de caras que falta pintar es:

$$162 - 54 = 108$$

La cantidad de pintura necesaria es:

$$108 \times 1 \text{ litro} = \textbf{108 litros}$$

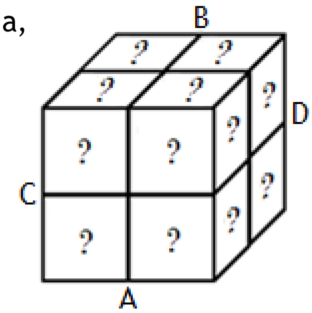
Criterios de corrección

• Determinar la cantidad de caras pintadas	2 puntos
• Determinarla cantidad de pintura por cara	2 puntos
• Determinar la cantidad de caras por pintar	2 puntos
• Dar la respuesta	1 punto

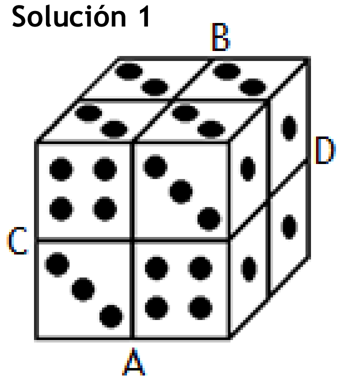
25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 2
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

PROBLEMA 1

Ocho dados como el que se muestra en la figura de la izquierda, forman un cubo.
En el plano que divide al cubo en dos partes pasando por AB, están las caras con 6 puntos.
En plano que divide al cubo pasando por CD están las caras con 5 puntos.
¿Cómo quedan dispuestos los puntos de los dados en el cubo y cuál es la suma de los puntos de las caras externas?
Observación: la suma de los puntos de las caras opuestas es 7.



Solución 1



Calculamos la suma de los puntos en cada una de las 6 caras del cubo:

Cara izquierda → $1 \times 4 = 4$
Cara de arriba → $2 \times 4 = 8$
Cara derecha → $1 \times 4 = 4$
Cara de abajo → $2 \times 4 = 8$
Cara de adelante → $3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$
Cara de atrás → $3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$

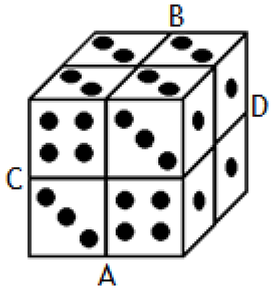
La suma total es:

$$4 + 8 + 4 + 8 + 14 + 14 = \mathbf{52}$$

Criterios de corrección

- Por construir correctamente la figura — 3 puntos
- Por determinar las seis sumas de las caras — 2 puntos
- Por escribir la suma de los puntos — 1 punto
- Por el resultado — 1 punto

Solución 2



Como la suma de las caras opuestas es 7, la suma de todos los puntos que tiene un dado es:

$$7 \times 3 = 21$$

La suma de todos los puntos de 8 dados es:

$$21 \times 8 = 168$$

A esto restamos la suma de los puntos de las caras que están sobre los tres planos que dividen al cubo en dos partes iguales:

$$168 - 8 \times 6 - 8 \times 5 - 4 \times 4 - 4 \times 3 = \mathbf{52}$$

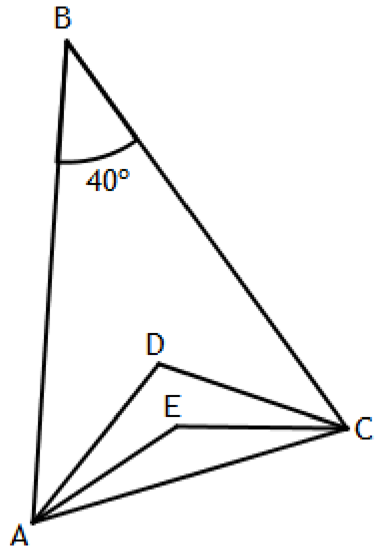
Criterios de corrección

- Por construir correctamente la figura — 3 puntos
- Por determinar la suma de todos los puntos de un dado — 1 punto
- Por determinar la suma de todos los puntos de ocho dados — 1 punto
- Por restar los puntos de las caras internas del cubo — 1 punto
- Por el resultado — 1 punto

PROBLEMA 2

En un triángulo isósceles ABC, BA = BC y $\mathrm{A\widehat{B}C}$ = 40º. Se trazan las bisectrices de $\mathrm{B\widehat{A}C}$ y $\mathrm{B\widehat{C}A}$ que se cortan en D. Luego, se trazan las bisectrices de $\mathrm{D\widehat{A}C}$ y $\mathrm{D\widehat{C}A}$, que se cortan en E. ¿Cuánto miden los ángulos internos del cuadrilátero ADCE?

Solución



Tenemos:

$$\mathrm{B\widehat{A}C} = \mathrm{B\widehat{C}A} = \frac{180º - 40º}{2} = 70º$$

$$\mathrm{D\widehat{A}C} = \mathrm{D\widehat{C}A} = 70º \div 2 = 35º$$

$$\mathrm{E\widehat{A}C} = \mathrm{E\widehat{C}A} = \mathrm{D\widehat{A}E} = \mathrm{D\widehat{C}E} = 35º \div 2 = 17{,}5º$$

En el triángulo ADC se tiene:

$$\mathrm{A\widehat{D}C} = 180º - 2 \cdot 35º = 110º$$

En el triángulo AEC se tiene:

$$\mathrm{A\widehat{E}C} = 180º - 2 \cdot 17{,}5º = 145º$$

El ángulo del cuadrilátero ADCE que nos falta calcular es el ángulo conjugado del que habíamos calculado:

$$\mathrm{A\widehat{E}C} \quad \Rightarrow \quad 360º - 145º = 215º$$

Los ángulos internos del cuadrilátero son:

215º ; 110º ; 17,5º ; 17,5º

Criterios de corrección

- Hallar $\mathrm{B\widehat{A}C}$ — 1 punto
- Hallar $\mathrm{D\widehat{A}C}$ — 1 punto
- Hallar $\mathrm{D\widehat{A}E}$ — 1 punto
- Hallar $\mathrm{A\widehat{D}C}$ — 1 punto
- Hallar $\mathrm{A\widehat{E}C}$ = 145º (interno del triángulo AEC) — 1 punto
- Hallar $\mathrm{A\widehat{E}C}$ = 215º (interno del cuadrilátero ADCE) — 1 punto
- Dar la respuesta — 1 punto

PROBLEMA 3

Dos números enteros a y b, mayores que 0, cumplen con las siguientes condiciones:
- $a \cdot b$ no es divisible entre 3.
- $(a + b)^3 - (a^3 + b^3)$ es divisible entre 3^3

Hallar los tres mayores valores de (a + b) que tengan 5 dígitos.

Solución
Desarrollamos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 - (a^3 + b^3) = 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \quad (1)$$

Como $(a + b)^3 - (a^3 + b^3)$ es divisible entre 3^3, también lo es $3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2$.

Entonces $3\,a\,b\,(a + b)$ es divisible entre 3^3.

Como ni a ni b son divisibles entre 3, (a + b) tiene que ser divisible por 3^2.

Entonces los tres valores mayores de (a + b) menores que 100 000 son:

99 999 ; 99 990 ; 99 981

Criterios de corrección

- Por llegar a la expresión (1) — 1 punto
- Por determinar que $3\,a\,b\,(a + b)$ es divisible entre 3^3 — 1 punto
- Por determinar que (a + b) es divisible entre 9 — 2 puntos
- Por hallar los tres valores mayores — 3 puntos

25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 2
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

PROBLEMA 4

Enzo halla todas las sumas de dos o más números enteros diferentes cuyo producto es 2 013. ¿Cuál es la menor suma que obtiene Enzo?

Solución
Los divisores no compuestos de 2 013 son:

-61 , -11 , -3 , -1 , 1 , 3 , 11 , 61

El producto de dos o más divisores da un número que es también divisor de 2 013. Como el producto es positivo y los sumandos enteros se dan dos posibilidades:

Todos los divisores considerados son positivos. Siguiendo este análisis el resultado de la suma será siempre un número positivo.

Todo número negativo será menor que cualquier número positivo.

La segunda posibilidad es que dos o cuatro de los sumandos sean negativos. Con esta idea buscamos las combinaciones favorables para hallar el menor número:

$$-1 + -3 + -11 + -61 = -76$$

$$1 + -3 + -11 \times 61 = -673$$

$$1 + -11 + -3 \times 61 = -193$$

$$1 + -3 \times 11 + -61 = -93$$

$$3 + -11 + -1 \times 61 = -69$$

$$-1 + -3 \times 11 \times 61 = -2\,014$$

$$-3 + -1 \times 11 \times 61 = -674$$

$$-11 + -1 \times 3 \times 61 = -194$$

$$-1 \times 3 \times 11 + -61 = -94$$

La menor suma es: **- 2 014**

Criterios de corrección

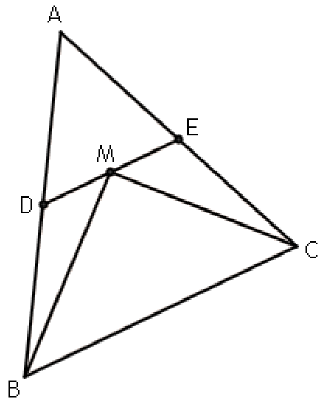
- Hallar los divisores de 2 013 — 2 puntos
- Por desechar los que den resultado positivo — 1 punto
- Por cada 3 combinaciones de acuerdo al enunciado — (hasta) 3 puntos
- Indicar el resultado — 1 punto

Observación: El participante que no haya considerado los números negativos podrá conseguir hasta **3 puntos** según el trabajo que realizado; (en ese caso la respuesta sería 3 + 11 + 61 = 75).

PROBLEMA 5

En un triángulo ABC, D es punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado AC. Se traza el segmento DE y se toma M punto medio de DE. Demostrar que la suma de las áreas de los triángulos DMB y MEC equivale a $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ABC.

Solución 1



Como D y E son puntos medios, DE = $\frac{1}{2}$ BC. Por otro lado, la altura del triángulo ADE es también la mitad de la altura del triángulo ABC. Entonces:

$$(ADE) = \frac{1}{4}(ABC)$$

Luego:

$$(DECB) = \frac{3}{4}(ABC) \quad (1)$$

Consideramos los triángulos DMB , BMC y MEC, que tienen todos la misma altura.

Además los triángulos DBM y MEC tienen bases iguales (DM = ME). Luego:

$$(DBM) = (MEC)$$

Y como BC = 4 DM = 4 ME resulta:

$$(BMC) = 4\,(DBM) = 2\,(DBM) + 2\,(MEC)$$

En (1) tenemos:

$$(DBM) + (MEC) + (BMC) = \frac{3}{4}(ABC)$$

$$(DBM) + (MEC) + 2\,[(DBM) + (MEC)] = \frac{3}{4}(ABC)$$

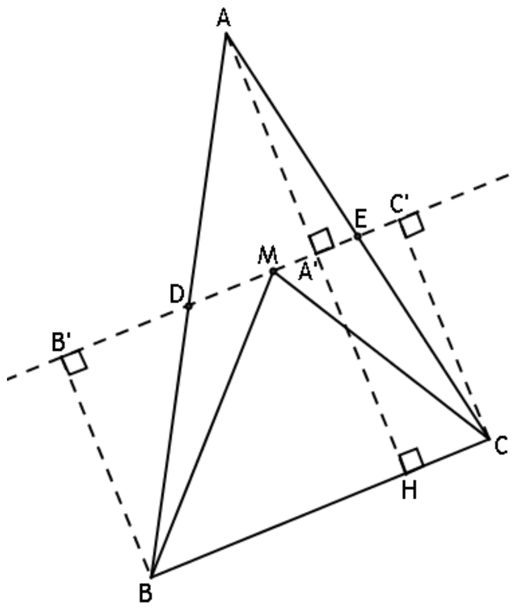
$$3\,[(DBM) + (MEC)] = \frac{3}{4}(ABC) \quad \Rightarrow \quad (DBM) + (MEC) = \frac{1}{4}(ABC)$$

Con esto se completa la demostración.

Criterios de corrección

- Por determinar que (ADE) = $\frac{1}{4}$ (ABC) 2 puntos
- Por determinar (DECB) = $\frac{3}{4}$ (ABC) 1 punto
- Por determinar que (DBM) + (MEC) + (BMC) = $\frac{3}{4}$ (ABC) 2 puntos
- Por completar la demostración 2 puntos

Solución 2



En el triángulo ABC tenemos:

$$BC = a \ \text{ y } \ AH = h_a$$

Entonces, como D y E son puntos medios:

$$DE \parallel BC \ \text{ y } \ DE = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

Aplicando el teorema de Thales:

$$AA' = \frac{AH}{2} = BB' = CC' = \frac{h_a}{2}$$

También:

$$DM = ME = \frac{a}{4}$$

Luego:

$$(BDM) = (CEM) = \frac{\frac{a}{4} \times \frac{h_a}{2}}{2} = \frac{a\,h_a}{16}$$

$$(BDM) + (CEM) = \frac{a\,h_a}{8} = \left(\frac{a\,h_a}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{(ABC)}{4}$$

Con esto está demostrado.

Criterios de corrección

- Por determinar que $DE \parallel BC$ — 1 punto
- Por determinar que $DE = \frac{BC}{2}$ — 1 punto
- Por establecer que $DM = ME = \frac{BC}{4}$ — 1 punto
- Por establecer que $BB' = AA' = CC' = \frac{h_a}{2}$ — 2 puntos
- Por establecer que $(BDM) + (CEM) = \frac{a\,h_a}{8}$ — 1 punto
- Por completar la demostración — 1 punto

PROBLEMA 1

Problema TN 2-0 (3,5) 13
Hallar el resultado de la siguiente operación:

$$2\,013^2 + 2\,011^2 + \ldots + 5^2 + 3^2 - 2\,012^2 - 2\,010^2 - \ldots - 4^2 - 2^2$$

Solución
Llamamos S al resultado de la operación y la reescribimos:

$$S = 2\,013^2 + 2\,011^2 + \ldots + 5^2 + 3^2 - 2\,012^2 - 2\,010^2 - \ldots - 4^2 - 2^2$$

$$S = (2\,013^2 - 2\,012^2) + (2\,011^2 - 2\,010^2) + \ldots + (5^2 - 4^2) + (3^2 - 2^2)$$

$$S = (2\,013 + 2\,012) \cdot 1 + (2\,011 + 2\,010) \cdot 1 + \ldots + (5 + 4) \cdot 1 + (3 + 2) \cdot 1$$

$$S = 2\,013 + 2\,012 + \ldots + 3 + 2$$

La cantidad de términos en esta serie es:

$$2\,013 - 1 = 2\,012$$

Vemos que:

$$2\,013 + 2 = 2\,015$$

$$2\,012 + 3 = 2\,015$$

Entonces hay 1 006 parejas que suman 2 015. La suma es:

$$2\,015 \times 1\,006 = \mathbf{2\,027\,090}$$

Criterios de corrección

- Reordenar la serie y simplificarla — 3 puntos
- Determinar la cantidad de términos — 2 puntos
- Hallar la suma — 2 puntos

PROBLEMA 2

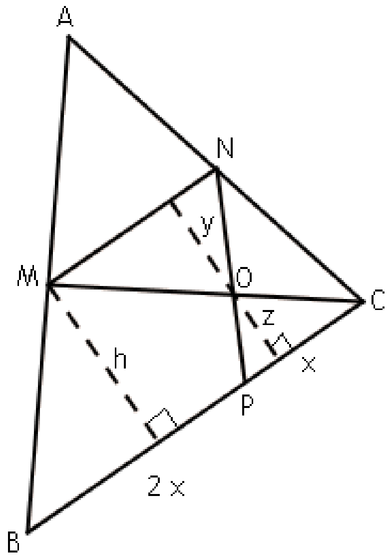
Problema G 8-0 (3,5) 13

En un triángulo ABC de área 9, se determinan los puntos M y N, puntos medios de los lados AB y AC respectivamente.

Sea el punto P en el lado BC tal que PC = $\frac{1}{3}$ BC. Sea O el punto de intersección de PN y CM.

Calcular el área del cuadrilátero BPOM.

Solución



Como M y N son puntos medio, tenemos:

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{3}{2}x$$

El área (AMN) es $\frac{9}{4}$, siendo h la altura del triángulo; luego:

$$\frac{\frac{3}{2}x \cdot h}{2} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad x\,h = 3$$

Como M es punto medio de AB, CM es mediana del triángulo ABC.

Por lo tanto:

$$(BMC) = (AMN) = \frac{ABC}{2} = \frac{9}{2}$$

Los triángulos MON y POC son semejantes. Entonces:

$$\frac{MN}{y} = \frac{PC}{z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{3}{2}x}{y} = \frac{x}{z} \quad \Rightarrow \quad 3\,z = 2\,y$$

Pero, z + y = h. Luego:

$$3\,z = 2\,(h - z) \quad \Rightarrow \quad 3\,z = 2\,h - 2\,z \quad \Rightarrow \quad 5\,z = 2\,h \quad \Rightarrow \quad z = \frac{2}{5}h$$

El área del triángulo POC es:

$$(POC) = \frac{x \cdot z}{2} = \frac{x \cdot \frac{2}{5}h}{2} = \frac{x\,h}{5} = \frac{3}{5}$$

El área buscada es:

$$(BPOM) = (BMC) - (POC) = \frac{9}{2} - \frac{3}{5} = \frac{39}{10} = \mathbf{3{,}9}$$

Criterios de corrección

• Hallar el valor de $x \cdot h$		2 puntos
• Determinar el área del triángulo BMC		1 punto
• Por el proceso para hallar (POC) = $\frac{3}{5}$	(hasta)	3 puntos
• Determinar el área de BPOM		1 punto

PROBLEMA 3

Problema TN 3-0 (3,5) 13
Dividimos un número natural N, de k dígitos, entre 19 y obtenemos un residuo que es igual a $10^{k-2} - Q$, siendo Q el cociente y Q < 101. Además $10^{k-2} - Q$ es mayor que 0.
¿Cuántos valores puede tener N?

Solución
Recordamos que en toda división entera inexacta, *dividendo es igual a divisor por cociente más residuo*. Entonces, si llamamos N al número natural, Q al cociente y R al residuo tenemos:

$$N = 19\,Q + R \quad (1)$$

Teniendo en cuenta valores posibles de k, vemos que k > 2.

Considerando k = 3, el residuo es igual a:

$$R = 10 - Q \quad \Rightarrow \quad N = 19\,Q + 10 - Q \quad ; \quad N = 18\,Q + 10 \quad (2)$$

Como el residuo tiene que ser menor que 19, tenemos:

$$R = 10 - Q < 19$$

Cualquier valor de Q entre 1 y 10 es posible (verifican la desigualdad anterior), pero no todos esos valores verifican la igualdad (2), ya que reemplazando en (2) Q = 4, tendremos N = 82 que no tiene 3 dígitos y nosotros hemos considerado k = 3

Entonces, los valores posibles de N son 5 (Q = 5 , 6 , … , 9)

Considerando k = 4, el residuo es:

$$R = 100 - Q \quad \Rightarrow \quad N = 19\,Q + 100 - Q \quad ; \quad N = 18\,Q + 100 \quad (3)$$

Como el residuo tiene que ser menor que 19, tenemos:

$$R = 100 - Q < 19 \quad \Rightarrow \quad 100 \geq Q > 81$$

Los valores posibles para Q son:

$$82 , 83 , 84 , \dots , 99$$

En total 18 números en este intervalo.

Para valores mayores tal como $k_1 > 4$, tendremos en $10^{k-2} - Q$,

$$10^{k_1 - 2} - Q$$

$$10^a - Q \quad (\text{para } a \geq 3)$$

Considerando $k_1 > 4$, el residuo es:

$$R = 10^{a \geq 3} - Q \quad \Rightarrow \quad N = 19\,Q + 10^{a \geq 3} - Q \quad ; \quad N = 18\,Q + 10^{a \geq 3} \quad \ldots (4)$$

Como el residuo tiene que ser menor que 19, tenemos:

$$R = 10^{a \geq 3} - Q < 19 \quad \Rightarrow \quad 10^{a \geq 3} \geq Q > 101$$

En esta desigualdad, se ve que el cociente será mayor que 101 (en realidad mucho mayor que 101), condición contradice el enunciado, por tanto, cualquier valor de k > 4, ya no es posible.

En los dos intervalos válidos, tenemos:

5 + 18 = **23**

Criterios de corrección

• Por escribir (1)	1 punto
• Analizar R = 10 – Q	1 punto
• Analizar R = 100 – Q	2 puntos
• Analizar valores de k mayores que 4	2 puntos
• Dar la respuesta	1 punto

PROBLEMA 4

Problema J 5-0 (3,5) 13
Pedro y Juan compiten con el siguiente juego:

- Hay 2 montones de piedras con X piedras en un montón e Y en el otro (X < 12 , Y < 11).
- Se puede sacar:
  - 1 piedra de uno de los montones, o
  - 2 piedras de uno de los montones, o
  - 1 piedra de cada montón, o
  - 2 piedras de un montón y 1 del otro.

Ningún jugador puede dejar de quitar cuando le toca jugar.
Pierde el jugador al que le toca quitar la última piedra.
Pedro es el primero en jugar y tiene una estrategia ganadora.
¿Cuáles son los tres máximos valores posibles de (X + Y)?

Solución
Usaremos la estrategia de comenzar por el final.

Las condiciones de "podas", según las reglas del juego son:

Y	1	2	0	1	2	0	1
X	0	0	1	1	1	2	2

Si a algún jugador le queda la situación (0 , 1) pierde el juego porque se verá obligado a quitar la última piedra. Como Pedro tiene una estrategia ganadora, esa situación le corresponda a Juan:

Y	0
X	1

Se llega a esta situación perdedora a partir de cualquiera de las siguientes, que corresponden al ganador:

Y	1	0	2	1	0	2	1
X	3	3	2	2	2	1	1

El ganador debe obligar al contrincante a jugar con la situación de la cual derivan todas las situaciones anteriores. Por lo tanto, el ganador debe dejar al perdedor en la situación:

Y	2
X	3

Se llega a esta situación perdedora a partir de cualquiera de las siguientes situaciones, que corresponden al ganador:

Y	3	4	2	3	4	2	3
X	3	3	4	4	4	5	5

En ninguna de estas situaciones llegamos a los que podrían ser los máximos valores de X e Y, por lo tanto continuamos el juego.

El ganador debe obligar al contrincante a jugar con la situación de la cual derivan todas las situaciones anteriores. Por lo tanto, el ganador debe dejar al perdedor en la situación:

Y	4
X	5

Se llega a esta situación perdedora a partir de cualquiera de las siguientes situaciones, que corresponden al ganador:

Y	5	6	4	5	6	4	5
X	5	5	6	6	6	7	7

En ninguna de estas situaciones llegamos a los que podrían ser los máximos valores de X e Y, por lo tanto continuamos el juego.

El ganador debe obligar al contrincante a jugar con la situación de la cual derivan todas las situaciones anteriores. Por lo tanto, el ganador debe dejar al perdedor en la situación:

Y	6
X	7

Se llega a esta situación perdedora a partir de cualquiera de las siguientes situaciones, que corresponden al ganador:

Y	7	8	6	7	8	6	7
X	7	7	8	8	8	9	9

En ninguna de estas situaciones llegamos a los que podrían ser los máximos valores de X e Y, por lo tanto continuamos el juego.

El ganador debe obligar al contrincante a jugar con la situación de la cual derivan todas las situaciones anteriores. Por lo tanto, el ganador debe dejar al perdedor en la situación:

Y	8
X	9

Se llega a esta situación perdedora a partir de cualquiera de estas situaciones, que corresponden al ganador:

Y	9	10	8	9	10	8	9
X	9	9	10	10	10	11	11

En esta situación encontramos las máximos valores de X e Y.

Calculamos las sumas:

$$9 + 9 = 18$$
$$10 + 9 = 19$$
$$8 + 10 = 18$$
$$9 + 10 = 19$$
$$10 + 10 = 20$$
$$8 + 11 = 19$$
$$9 + 11 = 20$$

La respuesta es:

18 , 19 , 20

Criterios de corrección

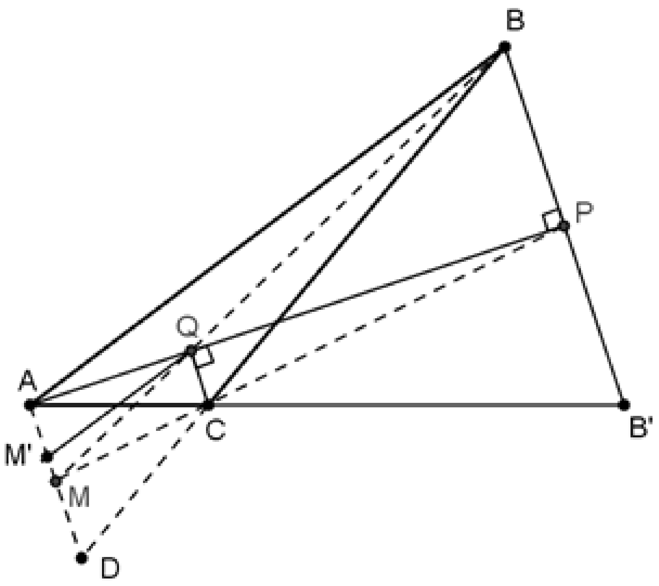
• Comenzar el problema por el final	1 punto
• Determinar la estrategia ganadora	3 puntos
• Llegar a la situación inicial	2 puntos
• Dar el resultado	1 punto

25.º OLIMPIADA NACIONAL JUVENIL DE MATEMÁTICA
RONDA NACIONAL – NIVEL 3
CRE Gral. Patricio Escobar
Encarnación, Itapúa - 12 de octubre de 2013

PROBLEMA 5

Problema G 17-0 (3,5) 13
En un triángulo obtusángulo ABC, AB es el lado mayor.
Se traza la bisectriz del ángulo BAC y se trazan a ésta perpendiculares desde B y C, cuyos pies son P y Q respectivamente.
D es un punto de la recta BC tal que AD $\perp$ AP.
Demostrar que las rectas AD, BQ y PC son concurrentes.

Solución



Determinamos B', simétrico de B con respecto a P y trazamos PB' y CB'.

Entonces ocurren los siguientes hechos:

- Queda determinado el triángulo isósceles BAB' (BB' $\perp$ AP y BP = PB'). Además $\mathrm{BAP} = \mathrm{PAB}'$.
- Eso hace que A, C y B' estén alineados.

Como AD $\perp$ AP, AD es una de las bisectrices exteriores del triángulo BAB' (o ABC).

Trazamos los rectas PC y BQ. Como CP corta a AP, también cortará a la bisectriz AD. Sea M ese punto de intersección.

Las rectas AD y BB' son paralelas por ser ambas perpendiculares a AP.

Luego, los triángulos BCB' y DCA son semejantes ($\mathrm{CBB}' = \mathrm{CDA}$; $\mathrm{BCB}' = \mathrm{ACD}$) y como P es punto medio de BB', M también es punto medio de AD. Por lo tanto AM = DM.

Ahora, debemos probar que la recta BQ también pasa por M.

Supongamos que la recta BQ no pasa por M y que corta a AD en M'. Esto implica que DM ≠ DM'. La estrategia consiste en demostrar que M' no es distinto a M.

Los triángulos CDM y CBP son semejantes ($\mathrm{MDC} = \mathrm{PBC}$; $\mathrm{MCD} = \mathrm{PCB}$).

Luego:

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{BP}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CP}} \quad (1)$$

Aplicamos una de las propiedades de las proporciones:

$$\frac{\mathrm{CD}+\mathrm{BC}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{CM}+\mathrm{CP}}{\mathrm{CP}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CP}} \quad (2)$$

Las rectas QC y DM' son paralelas por ser ambas perpendiculares a AP.

Luego, los triángulos BDM' y BCQ son semejantes.

Así tenemos:

$$\frac{BM'}{BQ} = \frac{DM'}{CQ} = \frac{BD}{BC} \quad (3)$$

Los triángulos AMP y CPQ son semejantes por ser rectángulos y tener en común el ángulo APC. Entonces:

$$\frac{MP}{CP} = \frac{AM}{CQ} = \frac{AP}{PQ} \quad (4)$$

Pero AM = DM, por lo tanto:

$$\frac{MP}{CP} = \frac{DM}{CQ} \quad (5)$$

Comparando (2) y (5) resulta:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{MP}{CP} = \frac{DM}{CQ} \quad (6)$$

De (3) y (6):

$$\frac{DM'}{CQ} = \frac{BD}{BC} = \frac{MP}{CP} = \frac{DM}{CQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{DM'}{CQ} = \frac{DM}{CQ} \quad \Rightarrow \quad DM' = DM$$

En conclusión, M' no puede ser diferente de M.

Luego, las rectas: AD, BQ y PC concurren en el punto M.

Con esto está suficiente demostrado.

Criterios de corrección

• Determinar AM = DM	3 puntos
• Determinar DM = DM'	3 puntos
• Concluir que AD, BQ y PC son concurrentes	1 punto