RONDA FINAL 2012

Nivel 1

Problema 1
En el colegio de Marta se organiza un torneo interno de fútbol en el que participan 8 equipos.
En la primera fecha hay 4 partidos: los que pierden se eliminan y los que ganan juegan la siguiente fecha, y así sucesivamente.
¿Cuántos partidos jugó el equipo que salió vice campeón?

Solución
Llamamos A , B , C , D , E , F , G y H a los equipos.

En una tabla vamos a organizar las fechas, los partidos y suponer los equipos ganadores.

1ª fecha	A – B	C – D	E – F	G – H
2ª fecha	A	C	E	G
3ª fecha	A		E	

La respuesta es: **3** (igual que el campeón)

CRITERIOS DE CORRECCCIÓN

- Determina que el vice campeón debe llegar hasta la última fecha — 2 puntos
- Determina que en la 2ª fecha sólo hay 4 equipos — 2 puntos
- Determina que en la 3ª fecha sólo hay 2 equipos — 2 puntos
- Encuentra la respuesta correcta — 1 punto

Problema 2
Se escriben números naturales en Filas, siguiendo el siguiente esquema: en la Fila 1 está sólo el número 2, en la Fila 2 están los números 5 y 6, etc.

2						
5	6					
8	9	10				
11	12	13	14			
14	15	16	17	18		
17	18	19	20	21	22	
20	21	22	23	24	25	26

....

....

¿Qué número ocupa el último lugar de la derecha de la Fila 50?

Solución 1
Vemos que la Fila 1 tiene un término, la Fila 2 dos términos, la fila 3, tres términos, y así sucesivamente.

Buscamos una “ley de formación” que nos permita escribir el primer término de cada fila, en función del número que corresponde a la fila:

Fila 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ $2 + 3 \cdot 0$ $\rightarrow$ $2 + 3\,(1 - 1)$
Fila 2 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ $2 + 3 \cdot 1$ $\rightarrow$ $2 + 3\,(2 - 1)$
Fila 3 $\rightarrow$ 8 $\rightarrow$ $2 + 3 \cdot 2$ $\rightarrow$ $2 + 3\,(3 - 1)$
Fila 4 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ $2 + 3 \cdot 3$ $\rightarrow$ $2 + 3\,(4 - 1)$
Fila 5 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ $2 + 3 \cdot 4$ $\rightarrow$ $2 + 3\,(5 - 1)$

Fila 50 $\rightarrow$ $2 + 3\,(50 - 1) = 2 + 3 \cdot 49 = 149$

Como la fila tiene 50 términos, el último término es:

$$149 + 49 = \mathbf{198}$$

Solución 2
Mirando la forma en que están dispuestos los números vemos que tiene la “forma” de un triángulo y que los números que están en la “hipotenusa” varían en 4 unidades:

$$2 \;,\; 6 \;,\; 10 \;,\; 14 \;,\; 18 \;,\; 22 \;,\; 26 \;,\; \ldots$$

La ley de formación es:

Fila 1 $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 0$ $\rightarrow$ $2 + 4\,(1 - 1)$
Fila 2 $\rightarrow$ 6 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 1$ $\rightarrow$ $2 + 4\,(2 - 1)$
Fila 3 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 2$ $\rightarrow$ $2 + 4\,(3 - 1)$
Fila 4 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 3$ $\rightarrow$ $2 + 4\,(4 - 1)$

Fila 5 $\rightarrow$ 18 $\rightarrow$ $2 + 4 \cdot 4$ $\rightarrow$ $2 + 4 (5 - 1)$

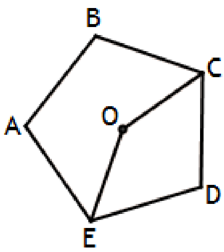
Fila 50 $\rightarrow$ $2 + 4 (50 - 1) = 2 + 4 \cdot 49 =$ **198**

CRITERIOS DE CORRECCCIÓN

• Determina que la Fila 50 tiene 50 términos	2 puntos
• Determina la ley de formación de la primera columna o la hipotenusa	hasta 3 puntos
• Encuentra la respuesta correcta	2 puntos

Problema 3
Dado el pentágono regular ABCDE, de centro O, se trazan los segmentos CO y EO. Calcular los 4 ángulos del cuadrilátero CDEO.

Solución 1



Calculamos la medida de los ángulos pedidos, teniendo en cuenta que el pentágono es regular.

Recordamos que la medida de un *ángulo central* de un polígono regular es 360º dividido el número de lados del polígono.

$$E\hat{O}C = 2 \cdot \frac{360º}{5} = \mathbf{144º}$$

La medida de un *ángulo interno* es $\frac{180º\,(n-2)}{n}$, siendo n el número de lados del polígono.

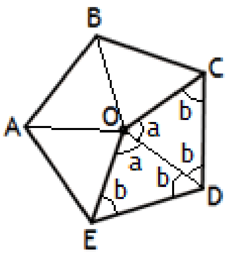
$$O\hat{C}D = O\hat{E}D = \frac{1}{2} \cdot \frac{180º\,(5-2)}{5} = \mathbf{54º}$$

$$E\hat{D}C = \frac{180º\,(5-2)}{5} = \mathbf{108º}$$

Confirmamos los valores obtenidos:

$$144º + 54º \cdot 2 + 108º = 360º$$

Solución 2



El pentágono regular se puede dividir en 5 triángulos isósceles iguales.

Los ángulos formados alrededor de un punto suman 360º. Entonces:

$$a = 360º \div 5 = 72º$$

$$E\hat{O}C = 2\,a = 2 \cdot 72º = \mathbf{144º}$$

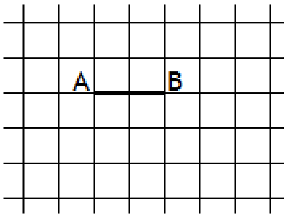
$$b = \frac{180º - 72º}{2} = 54º \quad \Rightarrow \quad O\hat{C}D = O\hat{E}D = \mathbf{54º}$$

$$E\hat{D}C = 2\,b = 2 \cdot 54º = \mathbf{108º}$$

CRITERIOS DE CORRECCCIÓN

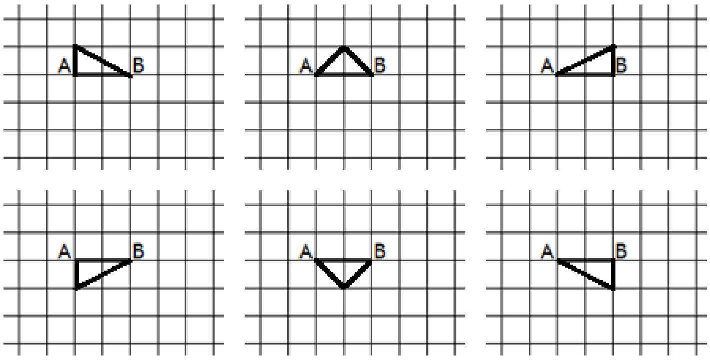
• Reconoce que los ángulos alrededor de O suman 360º	1 punto
• Encuentra el ángulo EOC	1 punto
• Reconoce que $O\hat{C}D = O\hat{E}D$	1 punto
• Reconoce que $E\hat{D}C = 2\,O\hat{C}D$	2 puntos
• Encuentra el ángulo $O\hat{C}D$	1 punto
• Encuentra el ángulo $E\hat{D}C$	1 punto

Problema 4



En el pedazo de la hoja cuadriculada que se ve en la figura, los lados de los cuadritos miden 1 cm.
Diana dibuja un segmento AB de 2 cm, como se muestra.
Ingrid debe dibujar todos los triángulos rectángulos posibles de 1 cm^2 de área, utilizando AB como uno de sus lados.
¿Cuántos triángulos rectángulos puede dibujar Ingrid?

Solución
Consideramos que AB = 2 cm es la base del triángulo rectángulo.



Entonces el área es:

$$1\ cm^2 = \frac{2\ cm \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 1\ cm$$

Luego, el tercer vértice está sobre la recta paralela a AB a una distancia de 1 cm, en ambos semiplanos.

Todos los vértices ubicados a esa distancia darán un triángulo de área 1, pero sólo 6 de ellos serán rectángulos.

Ingrid puede dibujar 6 triángulos rectángulos.

CRITERIOS DE CORRECCCIÓN

- Determina que la altura del triángulo debe ser 1 cm — 2 puntos
- Encuentra los 4 triángulos de cateto AB — 3 puntos
- Encuentra los 2 triángulos de hipotenusa AB — 2 puntos

Problema 5

Rodolfo le suma un número natural a 2 012, y el resultado es divisible por 73. Juanca le suma otro número natural a 2 012, y su resultado también es divisible por 73. Si los números de Rodolfo y Juanca son los menores posibles, ¿cuáles son esos números?

Solución

Al hacer la división se obtiene:

$$2\,012 = 73 \times 27 + 41$$

Como el residuo es 41, calculamos cuánto le falta que alcanzar 73:

$$73 - 41 = 32$$

Al sumar 32 a 41, el cociente será 28. Así mismo, si sumamos 73 el cociente aumenta en 1.

Entonces, los dos números son:

32 , **105**

CRITERIOS DE CORRECCCIÓN

• Determina el residuo de la división 2 012 por 73	2 puntos
• Encuentra el menor número completando el residuo hasta 73	3 puntos
• Encuentra el siguiente número sumando 73	2 puntos

Nivel 2

Problema 1
Pedro dice a sus amigos: "En el siglo XIX hubo un año que, leído del revés, daba un número 4 veces y medio mayor que el número correspondiente al año"
¿A qué año se refiere Pedro?

Solución
Sea $\overline{18\,a\,b}$ el año en cuestión. Entonces:

$$\overline{b\,a\,8\,1} = 4{,}5\ \overline{18\,a\,b}$$

$$1\,000\ b + 100\ a + 80 + 1 = 4{,}5\ (1\,000 + 800 + 10\ a + b)$$

$$1\,000\ b + 100\ a + 81 = 4\,500 + 3\,600 + 45\ a + 4{,}5\ b$$

$$995{,}5\ b + 55\ a = 8\,019 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{8\,019 - 995{,}5\ b}{55}$$

El valor de a debe ser entero. Para ello b debe ser par. Probando con 2 , 4 , 6 y 8 vemos que solamente 8 da un valor entero para a.

Luego b = 8 $\Rightarrow$ a = 1.

El año al que se refiere Pedro es el año **1818**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Escribe el año como $\overline{1\,8\,a\,b}$	1 punto
• Reconoce la condición $\overline{b\,a\,8\,1} = 4{,}5\,\overline{1\,8\,a\,b}$	1 punto
• Determina una relación entre a y b	2 puntos
• Determina una de las variables	2 puntos
• Determina la otra variables	1 punto

Problema 2
Ingrid es aficionada a inventar problemas. Les dice a sus amigos: “tengo una cantidad de fotos tal que si se divide entre 3 da residuo 2, si se divide entre 5 el residuo es 4 y si se divide entre 7 el residuo resulta 1”.
¿Cuál es la menor cantidad de fotos que puede tener Ingrid?

Solución
Llamamos N a la cantidad de fotos que tiene Ingrid. Entonces:

$$N = 3 \cdot A + 2 \quad ; \quad N = 5 \cdot B + 4 \quad ; \quad N = 7 \cdot C + 1$$

Luego:

$$N = \dot{3} + 2 \quad ; \quad N = \dot{5} + 4 \quad ; \quad N = \dot{7} + 1$$

Construimos una tabla buscando coincidencias para los valores de N:

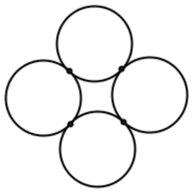
$\dot{3} + 2$	$\dot{5} + 4$	$\dot{7} + 1$
5	9	8
8	14	15
11	19	22
14	24	**29**
17	**29**	36
20	34	43
23	39	50
26	44	
29		
32		
35		
38		

Entonces, la menor cantidad de fotos es: **29**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

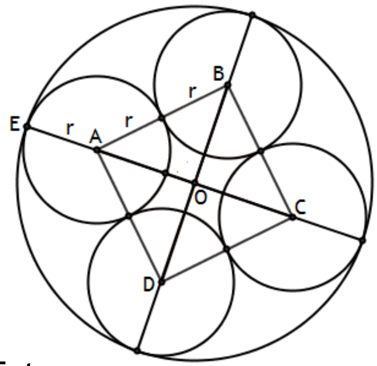
• Interpreta que N es múltiplo de 3 más 2, etc.	2 puntos
• Escribe una lista de los múltiplos de 3 más 2	1 punto
• Escribe una lista de los múltiplos de 5 más 4	1 punto
• Escribe una lista de los 4 múltiplos de 7 más 1	1 punto
• Encuentra la respuesta correcta	2 puntos

Problema 3



Cuatro circunferencias iguales de radio 1 son tangentes entre sí dos a dos. Las cuatro circunferencias son tangentes a una circunferencia mayor. ¿Cuál es el radio de la circunferencia mayor?

Solución



A , B , C y D son los centros de las cuatro circunferencias más pequeñas y son también los vértices el cuadrado que se forma. El lado de ese cuadrado es 2.

La diagonal AC del cuadrado es:

$$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Entonces:

$$AO = \sqrt{2}$$

El radio de la circunferencia mayor es:

$$EO = 1 + AO = 1 + \sqrt{2}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Esboza el centro y la circunferencia mayor	1 punto
• Determina que el radio mayor es la suma del radio menor más AO	2 puntos
• Determina que el lado del cuadrado ABCD es 2	2 puntos
• Calcula la medida de AO	1 punto
• Encuentra la respuesta correcta	1 punto

Problema 4
¿Cuál es la menor cantidad de enteros positivos consecutivos, cuya suma es 2 012?

Solución
Analizamos las condiciones del problema.

Probamos primero con 2 números:

$$2\ 012 \div 2 = 1\ 006 \quad \text{(imposible)}$$

Con 3 números:

$$2\ 012 \div 3 \cong 671$$

$$670 + 671 + 672 = 2\ 013$$

Es imposible que hayan 3 números, porque si disminuimos en 1 cada uno de ellos, la suma disminuye en 3 y es 2 010.

Con 4 números:

$$2\ 012 \div 4 = 503$$

$$501 + 502 + 503 + 504 = 2\ 010$$
(no, la otra posibilidad es 2 014)

Con 5 números:

$$2\ 012 \div 5 \cong 402$$

$$400 + 401 + 402 + 403 + 404 = 2\ 010$$
(no, la otra posibilidad es 2 015)

Con 6 números:

$$2\ 012 \div 6 \cong 335$$

$$333 + 334 + 335 + 336 + 337 + 338 = 2\ 013$$
(no, la otra posibilidad es 2 007)

Con 7 números:

$$2\ 012 \div 7 \cong 287$$

$$284 + 285 + 286 + 287 + 288 + 289 + 290 = 2\ 009$$
(no, la otra posibilidad es 2 016)

Con 8 números:

$$2\,012 \div 8 = 251{,}5$$

$$248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255 = 2\,012$$

8 números

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Descarta el caso de 2 números	1 punto
• Descarta el caso de 3 números	1 punto
• Descarta el caso de 4 números	1 punto
• Descarta el caso de 5 números	1 punto
• Descarta el caso de 6 números	1 punto
• Descarta el caso de 7 números	1 punto
• Encuentra el caso con 8 números	1 punto

Problema 5
En un cuadrado ABCD de 10 m de lado, está inscripto un triángulo APD de 25 m^2 de área (P está sobre uno de los lados del cuadrado).
Calcular cuántos metros puede medir la distancia BP.

Solución

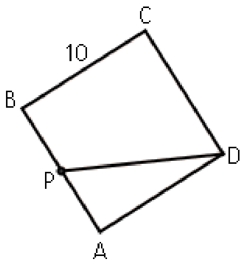


Figura 1

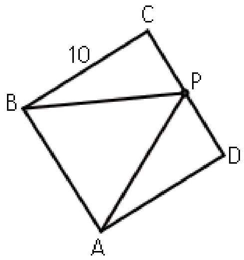


Figura 2

En primer lugar, el punto P no puede estar sobre el lado BC, puesto que la altura del triángulo APD sería 10 y por ende su área es:

$$(APD) = \frac{10 \times 10}{2} = 50$$

Luego, el vértice P tiene que estar sobre el lado AB o sobre el lado CD.

Calculamos la altura h del triángulo APD:

$$25 = \frac{10 \times h}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{25 \times 2}{10} = 5 = h$$

Entonces, en el primer caso (Figura 1):

$$BP = BA - PA = 10 - 5 = \mathbf{5}$$

En el segundo caso (Figura 2):

$$BP = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

La respuesta es: **5** ó **5** $\sqrt{\mathbf{5}}$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Por mostrar que P no puede estar sobre BC	3 puntos
• Por calcular la altura h del triángulo APD	2 puntos
• Por obtener la distancia BP en el caso 1	1 punto
• Por obtener la distancia BP en el caso 2	1 punto

Nivel 3

Problema 1
Se tiene una lista de números que cumple con las condiciones siguientes:
- El primer número de la lista es un número natural de una cifra.
- Cada número de la lista (a partir del segundo) se obtiene sumando 9 al número anterior.
- El número 2 012 figura en la lista.

Determinar cuál es el primer número de la lista.

Solución
Analizamos qué pasa con una lista de números cualquiera que cumpla las dos primeras condiciones del problema:

7 , 16 , 25 , 34 , 43 , ...

Como hemos sumado 9 a cualquier número para obtener el siguiente, vemos que:

16 – 7 = 9 (2º número – 1er número)

25 – 7 = 18 (3er número – 1er número)

34 – 7 = 27 (4º número – 1er número)

Notamos que la diferencia entre cualquier número de la lista y el primer número es múltiplo de 9. Comenzamos a buscar un número que pueda ser el primero:

2 012 – 1 = 2 011 (No)

2 012 – 2 = 2 010 (No)

2 012 – 3 = 2 009 (No)

2 012 – 4 = 2 008 (No)

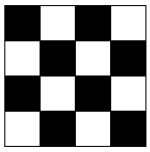
2 012 – 5 = 2 007 (Múltiplo de 9)

Entonces, el primer número de la lista es: **5**

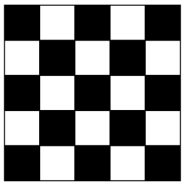
CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por notar que la diferencia entre el primer término y el último es múltiplo de 9 — 2-4 puntos
- Sólo notar que es una P.A. — 2 puntos
- Notar que se puede ir restando 9 desde 2 012 hasta el primero — 4 puntos
- Por encontrar la respuesta correcta — 3 puntos

Problema 2



Tablero 4 × 4



Tablero 5 × 5

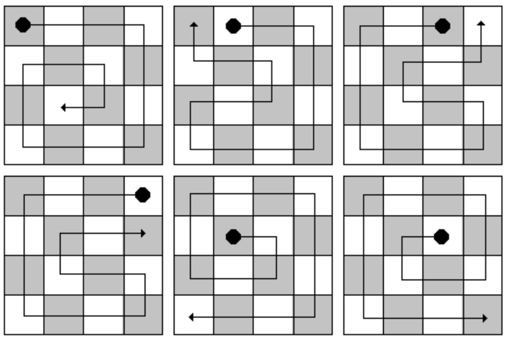
La Hormiguita Viajera camina sobre varios tableros cuadriculados en blanco y negro, moviéndose horizontalmente o verticalmente, pero sin pasar dos o más veces por la misma casilla. En cualquier tablero, la primera casilla superior izquierda es negra.

a) Si el tablero es de 4 × 4, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

b) Si el tablero es de 5 × 5, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

c) Si el tablero es de n × n (donde n es cualquier número natural), ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

Solución



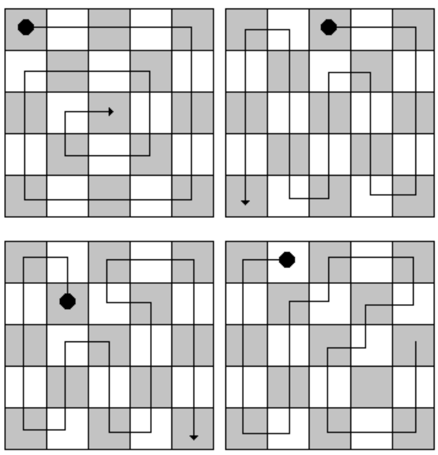
Vemos que en un tablero 4 × 4, el recorrido por todo el tablero es siempre posible, cualquiera sea la casilla de la cual parte la hormiguita.

Están dibujados algunos de los caminos posibles y algunas de las casillas.

Pero sin embargo, por la simetría de la figura (por rotación), están cubiertas todas las posibilidades del punto de partida.

Respuesta para la pregunta a: **puede partir de cualquier casilla**.

Analizamos ahora un tablero 5 × 5.Vemos que si parte de la esquina superior izquierda el recorrido es posible.



Por simetría esto se cumplirá también para las otras tres casillas que están en las esquinas.

Si parte de una de las casillas del medio de los lados, también es recorrido es posible. Por simetría esto se cumple para todas las casillas que están en el medio de los lados del tablero. Todas estas casillas son negras.

En cambio, en el último tablero, el recorrido no es posible. En este caso la hormiguita partió de una casilla blanca.

Respuesta para la pregunta b: **debe partir de una casilla negra**.

A partir de este análisis, y teniendo en cuenta que siempre elegiremos el camino más conveniente, estamos en condiciones de hacer generalizaciones.

En el caso de que n sea par, la cantidad de casilla bancas y negras es la misma y hay dos posibilidades:

Primero, que parta de una casilla blanca. Entonces la secuencia del recorrido es:

B N B N B N B N B N … B N B N B N

La otra:

N B N B N B N B N B … N B N B N B

Entonces partiendo de cualquier casilla, el recorrido por todas las casillas será siempre posible.

En el caso de que n sea impar habrá una casilla negra más que la cantidad de casillas blancas.

Consideramos las dos posibilidades:

B N B N B N … B N B N B N N

N B N B N B … N B N B N B N

En el caso de que parta de una casilla blanca, al final tendrá que pasar de una casilla negra a otra negra y eso es imposible porque no se mueve en diagonal.

En cambio, si parte de una casilla negra siempre habrá una casilla negra al lado de una blanca y entonces podrá completar el recorrido.

Respuesta para la pregunta c:

Si n es par puede partir de cualquier casilla.

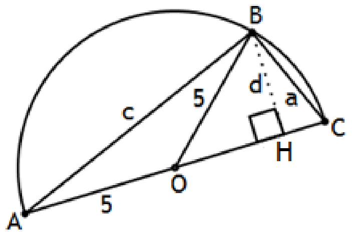
Si n es impar no puede partir de una casilla blanca.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Resuelve el caso 4 × 4	1 punto
• Resuelve el caso 5 × 5	2 puntos
• Generaliza para el caso n par	2 puntos
• Generaliza para el caso n impar	2 puntos

Problema 3
Se inscribe un triángulo ABC (recto en B) en una semicircunferencia de diámetro AC = 10.
Calcular la distancia del vértice B al lado AC, si la mediana correspondiente al lado AC es media geométrica de los otros dos lados. (Recuerda que si $\frac{m}{n} = \frac{n}{q}$, n es media geométrica de m y q)

Solución 1



El triángulo ABC, inscripto en una semicircunferencia es recto en B.

Los lados AB = c y BC = a son los catetos.

La mediana BO es un radio, por lo tanto mide 5.

Entonces escribiendo la relación proporcional correspondiente tenemos:

$$\frac{c}{5} = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad ac = 25$$

El área del triángulo ABC es:

$$(ABC) = \frac{ac}{2} = \frac{25}{2}$$

$$(ABC) = \frac{10\ d}{2} = 5\ d$$

Por lo tanto:

$$5\ d = \frac{25}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \mathbf{2{,}5}$$

Solución 2
Sean a y c los catetos y d la distancia pedida.

Como la mediana es la media geométrica de los catetos tenemos que:

$$\frac{c}{5} = \frac{5}{a} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{25}{a} \quad (1)$$

Los triángulos ABC y AHB son semejantes por tener sus tres ángulos iguales. Luego:

$$\frac{c}{d} = \frac{10}{a} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{10\ d}{a} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{25}{a} = \frac{10\ d}{a} \quad \Rightarrow \quad 25 = 10\ d \quad \Rightarrow \quad \mathbf{2{,}5 = d}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Por escribir BO = 5	1 punto
• Por encontrar ac = 25	2 puntos
• Por encontrar una relación más de a, c con d (Sol. 1 ó 2)	2 puntos
• Por encontrar la respuesta correcta	2 puntos

Problema 4

Hallar el número de cuatro cifras diferentes de la forma $\overline{abcd}$, sabiendo que es divisible por 3 y que $\overline{ab} - \overline{cd} = 11$.

($\overline{abcd}$ es un número de 4 dígitos, con los 4 dígitos diferentes; $\overline{ab}$ es un número de 2 dígitos con los 2 dígitos diferentes, lo mismo que $\overline{cd}$)

Solución

Según los datos del problema:

$$\overline{abcd} = 3\,A \;\; ; \;\; \overline{ab} - \overline{cd} = 11 \quad \text{(A es un número entero positivo)}$$

Entonces, podemos escribir las igualdades:

$$1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d = 3\,A \qquad (1)$$

$$(10\,a + b) - (10\,c + d) = 11 \qquad (2)$$

En (2):

$$10\,a + b = 10\,c + d + 11 \qquad (3)$$

En (1):

$$100\,(10\,a + b) + 10\,c + d = 3\,A \qquad (4)$$

Llevando (3) a (4):

$$100\,(10\,c + d + 11) + (10\,c + d) = 3\,A$$

$$100\,(10\,c + d) + 1\,100 + (10\,c + d) = 3\,A$$

$$101\,(10\,c + d) = 3\,A - 1\,100 \quad \Rightarrow \quad 3\,A = \overset{\bullet}{101} + 1\,100$$

Siendo que 3 A es el número buscado, al evaluar el segundo miembro de la igualdad anterior, debemos obtener un múltiplo de 3 que cumpla las condiciones del problema. Entonces:

1 100 + 101 = 1 201 (No)
1 100 + 202 = 1 302 (No, porque c no puede ser 0)
1 100 + 303 = 1 403 (No)
1 100 + 404 = 1 504 (No)
1 100 + 505 = 1 605 (No)
1 100 + 606 = 1 706 (No)
1 100 + 707 = 1 807 (No)
1 100 + 808 = 1 908 (No)
1 100 + 909 = 2 009 (No)
1 100 + 1 010 = 2 110 (No)
1 100 + 1 111 = 2 211 (No)

$$1\ 100 + 1\ 212 = 2\ 312 \quad \text{(No)}$$
$$1\ 100 + 1\ 313 = 2413 \quad \text{(No)}$$
$$1\ 100 + 1\ 414 = 2\ 514 \quad \text{(Si)}$$

Hemos encontrado el primer número que cumple las condiciones del problema. Los demás se podrán encontrar de la misma forma.

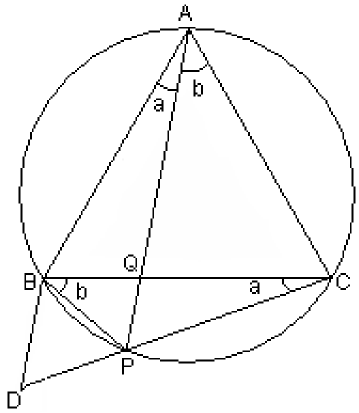
CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por expresar los tres números en notación polinómica hasta 2 puntos
- Por relacionar las expresiones obtenidas 1 punto
- Por explorar posibles valores de $\overline{abcd}$ y descartar números que no cumplen las condiciones hasta 2 puntos
- Por encontrar la solución correcta 2 puntos

Problema 5
En un triángulo equilátero ABC se elige un punto cualquiera Q sobre BC. Se traza la circunferencia circunscripta al triángulo y se prolonga AQ hasta cortar en P a la circunferencia.

Demostrar que $\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{PQ}$

Solución 1



Prolongamos CP y tomamos D tal que PD = PB.

Vemos que:

$B\widehat{A}P = B\widehat{C}P =$ a

$P\widehat{A}C = P\widehat{B}C =$ b

Como a + b = 60º , en el triángulo PBC tenemos:

$B\widehat{P}C = 180^\circ - (a + b) = 120^\circ$

Pero: $A\widehat{P}C = A\widehat{B}C = 60^\circ$

Entonces: $B\widehat{P}Q = B\widehat{C}A = 60^\circ$

Como PD = PB por construcción, el triángulo BPD es isósceles con:

$$D\widehat{B}P = B\widehat{D}P = \frac{180º - B\widehat{P}D}{2} = \frac{180º - 60º}{2} = 60º$$

Luego, el triángulo BPD es equilátero. Entonces PQ ∥ DB y los triángulos DBC y PQC son semejantes. Por lo tanto podemos escribir la proporción:

$$\frac{BD}{PQ}=\frac{DC}{PC} \Rightarrow \frac{BD}{PQ}=\frac{DP+PC}{PC} \Rightarrow \frac{BD}{PQ}=\frac{DP}{PC}+1$$

Dividiendo por DP = BD = PB , tenemos:

$$\frac{1}{PQ}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PB}$$

Con esto se completa la demostración.

Solución 2

Por cuadriláteros cíclicos: $A\widehat{B}C = A\widehat{P}C = 60°$ y $A\widehat{C}B = A\widehat{P}B = 60°$, entonces $A\widehat{P}C = A\widehat{P}B$, por lo que PQ es bisectriz.

Por el teorema de la bisectriz en el triángulo BPC tenemos:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{BQ}{QC} \quad (1)$$

Como los triángulos ABQ y CPQ son semejantes por tener sus ángulos iguales, tenemos:

$$\frac{BQ}{PQ} = \frac{AB}{PC} \quad \Rightarrow \quad PC = \frac{AB \cdot PQ}{BQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{PC} = \frac{BQ}{AB \cdot PQ} \quad (2)$$

Los triángulos AQC y BQP también son semejantes por la misma razón anterior, resulta:

$$\frac{PQ}{QC} = \frac{PB}{AC} \quad \Rightarrow \quad PB = \frac{PQ \cdot AC}{QC} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{PB} = \frac{QC}{PQ \cdot AC} \quad (3)$$

Entonces:

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{BQ}{AB \cdot PQ} + \frac{QC}{AC \cdot PQ} \quad (4)$$

Como el triángulo ABC es equilátero, AB = AC. Reemplazando esto en (4):

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{BQ}{AB \cdot PQ} + \frac{QC}{AB \cdot PQ} = \frac{BQ+QC}{AB \cdot PQ} \quad (5)$$

Además, BQ + QC = AC = AB. Luego:

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{AB}{AB \cdot PQ} = \frac{1}{PQ}$$

Con esto está demostrado.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por construir la figura correcta — 2 puntos
- Por relacionar los ángulos entre sí — 2 puntos
- Por relacionar triángulos semejantes y escribir las proporciones correspondientes — 2 puntos
- Por completar la demostración — 1 punto