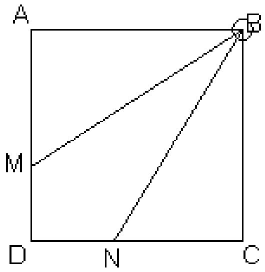
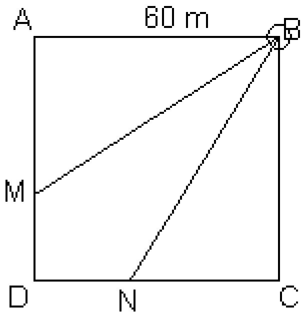
RONDA FINAL 2010 – NIVEL 3

Problema 1



Juan quiere repartir entre sus tres hijos el campo cuadrado de la manera que se indica en el dibujo, porque en el vértice B hay un pozo que han de compartir.
Teniendo en cuenta que el lado del campo es de 60 m y que quiere dar a cada hijo un terreno tal que los tres campos tengan la misma superficie, ¿a qué distancia han de estar los puntos M y N del vértice D?

Solución



La superficie del terreno cuadrangular es:

$$60 \text{ m} \times 60 \text{ m} = 3\,600 \text{ m}^2$$

A cada hijo le corresponde:

$$3\,600 \text{ m}^2 \div 3 = 1\,200 \text{ m}^2$$

Considerando el triángulo MAB, tenemos:

$$1\,200 \text{ m}^2 = \frac{60 \text{ m} \cdot \text{AM}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \text{AM} = 40 \text{ m}$$

Por lo tanto:

$$\text{MD} = 60 \text{ m} - 40 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

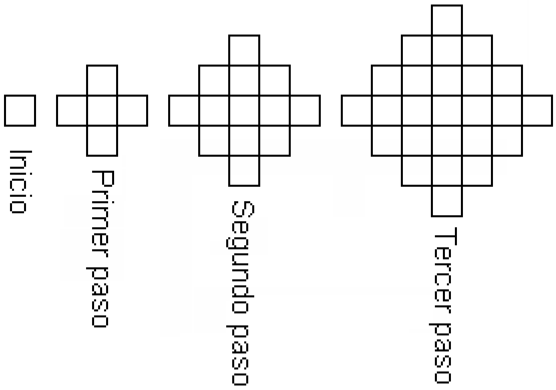
En el triángulo BNC pasa lo mismo. Entonces: DN = 20 m

La respuesta es: **20 m**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

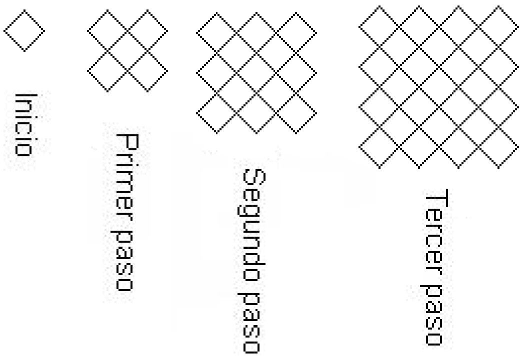
• Por determinar la superficie del terreno	2 puntos
• Por determinar lo que corresponde a cada hijo	1 punto
• Por determinar el valor de AM (o NC)	2 puntos
• Por hallar el valor de MD (o ND)	1 punto
• Por determinar que MD y ND son iguales	1 punto

Problema 2



En el gráfico vemos una serie de figuras que se han formado según cierta regla, que se debe descubrir.
Después de 20 pasos, ¿cuántos cuadraditos tendrá la figura?

Solución 1



Giramos las figuras 45 grados como se muestra.
Vemos que desde el inicio (paso 0) el desarrollo de la serie es:

Paso 0 $\rightarrow$ 1 fila de 1 cuadradito

Paso 1 $\rightarrow$ 1 fila de 1 cuadradito
2 filas de 2 cuadraditos

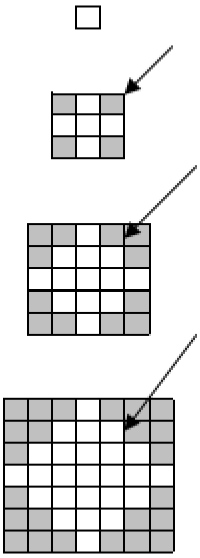
Paso 2 $\rightarrow$ 2 filas de 2 cuadraditos
3 filas de 3 cuadraditos

Paso 3 $\rightarrow$ 3 filas de 3 cuadraditos
4 filas de 4 cuadraditos

Por lo tanto, en el paso 20:
20 filas de 20 cuadraditos
21 filas de 21 cuadraditos

$20 \cdot 20 + 21 \cdot 21 =$ **841 cuadraditos**

Solución 2



Como se muestra en la figura, se puede completar el cuadrado original de un paso al siguiente, y luego restar los cuadrados que están sombreados.

Por un lado, de un paso al siguiente, el cuadrado aumenta 2 cuadraditos de lado. Así, el cuadrado grande en el paso *n* estará formado por $(2\,n + 1)^2$ cuadraditos.

Por otro lado, podemos ver que en cada paso tenemos que eliminar los cuadraditos de cuatro esquinas iguales. Si nos fijamos la cantidad de cuadraditos en una esquina, en el paso 1 hay 1 cuadradito, en el paso 2 hay 1 + 2 cuadraditos, en el paso 3 hay 1 + 2 + 3 cuadraditos, y en el paso *n* habrá:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\left(n+1\right)}{2} \text{ cuadraditos en una esquina.}$$

Por tanto, la cantidad de cuadraditos que hay que eliminar en cada paso será $2n\,(\,n + 1\,)$.

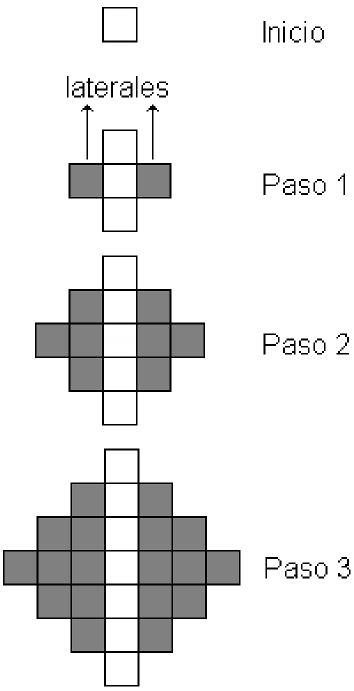
Generalizando, en el paso *n* la cantidad de cuadraditos de la figura será:

$$(2\,n + 1)^2 - 2\,n\,(\,n + 1\,) = 2\,n^2 + 2\,n + 1$$

Por lo tanto, en el paso n = 20, habrá:

$$2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 + 1 = \mathbf{841\ cuadraditos}$$

Solución 3



Consideramos las figuras divididas en un eje (columna central) y dos laterales (columnas sombreadas).

Vemos que de un paso al siguiente, la cantidad de cuadraditos del eje aumenta en dos unidades. Por lo tanto, para el paso *n*, la cantidad de cuadraditos del eje será 2 n + 1.

Por otro lado, la cantidad de cuadraditos en cada lateral será:

Paso 1 $\rightarrow$ 1 cuadradito
Paso 2 $\rightarrow$ 1 + 3 cuadraditos
Paso 3 $\rightarrow$ 1 + 3 + 5 cuadraditos
Paso *n* $\rightarrow$ 1 + 3 + 5 + … + (2 n – 1) cuadraditos

Generalizando, podemos escribir la fórmula general para la suma de la progresión aritmética *n* de términos como:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\,n - 1) = \frac{n\,[1 + (2\,n - 1)]}{2} = n^2$$

Por tanto, considerando que hay dos laterales, la cantidad de cuadraditos en los laterales en el paso *n* será $2\,n^2$.

Finalmente, la cantidad de cuadraditos de la figura en el paso *n* será la suma de los cuadraditos del eje y de los laterales, y estará dada por la expresión:

$$2\,n^2 + 2\,n + 1$$

Por lo tanto, en el paso n = 20, habrá:

$$2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 20 + 1 = \mathbf{841\ cuadraditos}$$

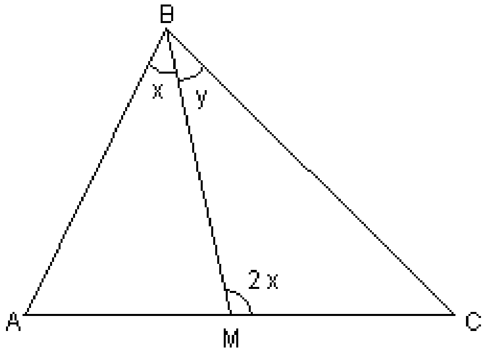
Criterios De Corrección

- Por realizar inspecciones que conduzcan a alguna expresión general — 2 puntos
- Por encontrar una regla general — 4 puntos
- Por hallar el resultado correcto — 1 punto

Problema 3

En un triángulo ABC, se traza la mediana BM. Se cumple que BC = $\frac{2}{3}$ MC y $\angle BMC = 2\angle ABM$. Determinar $\frac{AB}{AM}$.

Solución



Como BM es mediana, tenemos: AM = MC

Además $\angle BMC = 2\angle ABM$

Designamos con 2x la medida del ángulo BMC y con *x* la medida del ángulo ABM. Entonces, como 2x es un ángulo externo al triángulo ABM, tenemos:

$$\angle A + x = 2x \qquad \Rightarrow \qquad \angle A = x$$

Por lo tanto, el triángulo ABM es isósceles y AM = MB. Pero AM = MC y resulta BM = MC. Entonces, el triángulo BMC es también isósceles.

En el triángulo ABC tenemos:

$$\angle A + x + y + \angle C = 180^\circ \quad , \quad x + x + y + y = 180^\circ \;\Rightarrow\; x + y = 90^\circ$$

Luego, el triángulo ABC es recto en B. por lo tanto:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (2\,AM)^2 = (AB)^2 + (\tfrac{2}{3}MC)^2$$

$$4\,(AM)^2 = (AB)^2 + \frac{4}{9}\,(AM)^2 \qquad \Rightarrow \qquad (AB)^2 = 4\,(AM)^2 - \frac{4}{9}\,(AM)^2 = \frac{32}{9}\,(AM)^2$$

$$\frac{(AB)^2}{(AM)^2} = \frac{32}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{AB}{AM} = \frac{4}{3}\sqrt{2}}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por realizar el dibujo correctamente — 1 punto
- Por determinar que $\angle BAM = \angle ABM$ — 2 puntos
- Por deducir que el triángulo ABC es recto en B — 2 puntos
- Por calcular el resultado — 2 puntos

Problema 4

Hallar todos los números naturales de cuatro cifras $\overline{abcd}$ que sean múltiplos de 11, tal que el número de dos cifras $\overline{ac}$ sea múltiplo de 7 y $a + b + c + d = d^2$.

Solución 1

$$\overline{abcd} = \dot{11} \Rightarrow (b+d) - (a+c) \to \dot{11}$$

$$\overline{ac} \to \dot{7} \Rightarrow 10a + c \to \dot{7}$$

Considerando $10a + c = \dot{7}$ tenemos:

para $a = 1$	$\to$	$c = 4$
para $a = 2$	$\to$	$c = 1$; $c = 8$
para $a = 3$	$\to$	$c = 5$
para $a = 4$	$\to$	$c = 2$; $c = 9$
para $a = 5$	$\to$	$c = 6$
para $a = 6$	$\to$	$c = 3$
para $a = 7$	$\to$	$c = 0$; $c = 7$
para $a = 8$	$\to$	$c = 4$
para $a = 9$	$\to$	$c = 1$; $c = 8$

Considerando $(b + d) – (a + c) = \dot{11}$ tenemos 3 casos posibles:

<u>Caso 1</u>: Si $(b + d) – (a + c) = 0 \quad \Rightarrow \quad b + d = a + c$

Como $a + b + c + d = d^2 \quad \Rightarrow \quad 2(a + c) = d^2$ que se verifica solo para $a = 3$, $c = 5$ lo que da $d = 4$

$\therefore \quad b + 4 = 3 + 5 \Rightarrow \quad b = 4$ y el número es **3 454**

<u>Caso 2</u>: Si $(b + d) - (a + c) = 11 \quad \Rightarrow \quad b + d = 11 + (a + c)$

Como $a + b + c + d = d^2 \quad \Rightarrow \quad 11 + 2(a + c) = d^2 \quad \Rightarrow \quad a = 7 , c = 0$

$11 + 2(7 + 0) = d^2 \quad \Rightarrow \quad d = 5$
$b + 5 = 11 + 7 + 0 \quad \Rightarrow \quad b = 13$ (imposible)

<u>Caso 3</u>: Si $(a + c) - (b + d) = 11 \quad \Rightarrow \quad (a + c) - 11 = b + d$

Como $a + b + c + d = d^2 \quad \Rightarrow \quad 2(a + c) = d^2+11 \Rightarrow$ d impar
Si $d = 1$, $a + c = 6$ entonces $a = 4$, $c = 2$ y $b+ 1 = 4 + 2 – 11 \quad \Rightarrow \quad b = - 6$ (imposible)
Si $d = 3$, $a + c = 10$ entonces $a = 2$, $c = 8$ y $b+ 3 = 2 + 8 – 11 \quad \Rightarrow \quad b = - 4$ (imposible)
o bien, $a=9$, $c=1$ y $b+ 3 = 9 + 1 – 11 \quad \Rightarrow \quad b = - 4$ (imposible)

Obs.: Si $|(b + d) – (a + c)| \geq 121$ ya no se cumple pues a, b, c, d tienen 1 dígito.

Luego hay un solo resultado posible: **3 454**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por establecer todas las posibilidades de $\overline{ac}$ — 1 punto
- Por escribir y usar el criterio de divisibilidad del 11 — 1 punto
- Por analizar el caso 1 — 1 punto
- Por analizar el caso 2 — 1 punto
- Por analizar el caso 3 — 1 punto
- Por determinar que no hay otros casos — 1 punto
- Por encontrar la única respuesta correcta — 1 punto

Solución 2

$$\overline{ac} \to \dot{7} \Rightarrow 10a + c \to \dot{7}$$

para a = 1	→	c = 4	para a = 6	→	c = 3
para a = 2	→	c = 1 ; c = 8	para a = 7	→	c = 0 ; c = 7
para a = 3	→	c = 5	para a = 8	→	c = 4
para a = 4	→	c = 2 ; c = 9	para a = 9	→	c = 1 ; c = 8
para a = 5	→	c = 6			

Como a + b + c + d = d^2, d solo puede ser 3, 4 o 5, porque si d=2, a+b+c=2 (imposible) y si $d \geq 6$, $a+b+c \geq 30$ (imposible).

Existen 18 posibilidades que cumplen los dos criterios anteriores,

1143 , 2313 , 4023 , 1744 , 2914 , 2284 , 3454 , 4624 , 5164 ,
6334 , 7504 , 8044 , 9214 , 4795 , 5965 , 7675 , 8845 , 9385

La única opción que es múltiplo de 11 es: **3 454**

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por establecer todas las posibilidades de $\overline{ac}$ — 1 punto
- Por analizar el caso d = 3 — 1 punto
- Por analizar el caso d = 4 — 1 punto
- Por analizar el caso d = 5 — 1 punto
- Por determinar que no hay otros valores de d — 1 punto
- Por descartar todas las posibilidades que no cumplen ser múltiplos de 11 — 1 punto
- Por encontrar la única respuesta correcta — 1 punto

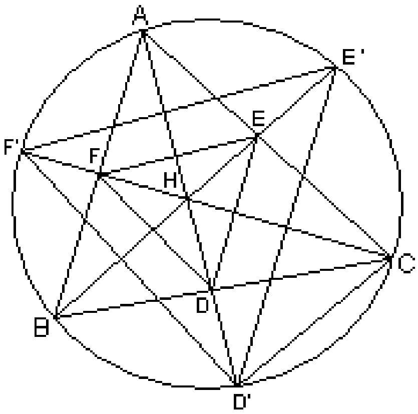
Problema 5

En un triángulo ABC se trazan las alturas AD , BE y CF.

Se construye luego la circunferencia circunscripta del triángulo ABC y se prolongan las alturas hasta que corten a la circunferencia en tres puntos diferentes de A , B y C.

Demostrar que los puntos en los que las prolongaciones de las alturas cortan a la circunferencia circunscripta forman un triángulo semejante al triángulo DEF.

Solución



En primer lugar tenemos:

$$CF \perp AB \;,\; AD \perp BC \;,\; BE \perp AC$$

Los ángulos FCB y BAD son iguales porque ambos equivalen a $90^\circ - \angle B$.

Los ángulos BAD y BCD’ son iguales porque ambos abarcan el mismo arco BD’. Entonces:

$$\angle FCB = \angle BCD'$$

En los triángulos rectángulos HDC y D’ DC (rectos en D) tenemos un cateto común (DC) e iguales los ángulos agudos correspondientes a ese cateto, entonces, los triángulos son iguales, lo cual implica que los otros dos catetos son iguales, entonces:

$$HD = DD'$$

De esto se deduce que D es el punto medio de HD’.

De igual forma, E es el punto medio de HE’ y F es el punto medio de HF’.

Considerando el triángulo HD’F’, el segmento DF que uno los puntos medios de dos de los lados, es paralelo al tercer lado, entonces:

$$DF \parallel D'F'$$

Lo mismo tenemos con:

$$EF \parallel E'F' \quad y \quad DE \parallel D'E'$$

Luego, los triángulos DEF y D’E’F’ tienen sus lados respectivamente paralelos, por lo tanto, los dos triángulos son semejantes.

Con esto se completa la demostración.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Por graficar correctamente	1 punto
• Por determinar que $\angle FCB = \angle BAD$	1 punto
• Por deducir que D es el punto medio de HD’ (o alguna equivalencia)	2 puntos
• Por completar la demostración	3 puntos