RONDA FINAL 2010 – NIVEL 2

Problema 1
¿Cuáles son los números enteros de tres cifras, tales que la cifra central es la media aritmética (promedio) de las otras dos?

Solución

Sea $\overline{a\,b\,c}$ el número de tres cifras con $a \neq 0$ tal que se cumpla: $b = \dfrac{a + c}{2}$.

La suma (a + c) tiene que ser divisible entre 2, entonces (a + c) puede ser:

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18

Para 2:

210 ; **111** (son 2 números)

Para 4:

420 ; **321** ; **222** ; **123** (4 números)

Para 6:

630 ; **531** ; **432** ; **333** ; **234** ; **135** (6 números)

Para 8:

840 ; **741** ; **642** ; **543** ; **444** ; **345** ; **246** ; **147** (8 números)

Para 10:

951 ; **852** ; **753** ; **654** ; **555** ; **456** ; **357** ; **258** ; **159** (9 números)

Para 12:

963 ; **864** ; **765** ; **666** ; **567** ; **468** ; **369** (7 números)

Para 14:

975 ; **876** ; **777** ; **678** ; **579** (5 números)

Para 16:

987 ; **888** ; **789** (3 números)

Para 18:

999 (1 número)

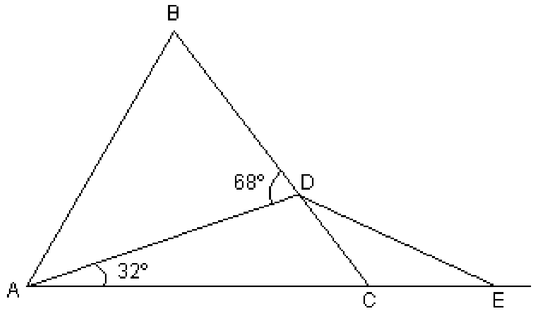
En total, la cantidad de números es

$$2 + 4 + 6 + 8 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 45$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por determinar que la suma (a + c) tiene que ser divisible entre 2 — 2 puntos
- Por realizar exploraciones y encontrar al menos 5 números que cumplan con la condición — hasta 2 puntos
- Por hallar todos los números — 3 puntos

Problema 2



En un triángulo ABC, se elige sobre el lado BC un punto D tal que $\angle ADB = 68º$.
Se prolonga el lado AC y sobre la prolongación se ubica un punto E tal que DC = CE (el punto C queda entre A y E). Siendo $\angle DAC = 32º$, calcular la medida del ángulo $\angle BDE$.

Solución 1
Considerando el vértice D tenemos:

$$\angle ADB + \angle ADC = 180º$$
$$\angle ADC = 180º - \angle ADB = 180º - 68º$$
$$\angle ADC = 112º$$

En el triángulo ADC tenemos:

$$\angle ADC + \angle DAC + \angle ACD = 180º$$
$$\angle ACD = 180º - \angle ADC - \angle DAC = 180º - 112º - 32º = 36º$$

Considerando el vértice C tenemos:

$$\angle ACD + \angle DCE = 180º \Rightarrow \quad \angle DCE = 180º - \angle ACD \Rightarrow \quad \angle DCE = 180º - 36º = 144º$$

En el triángulo DCE, los lados DC y CE son iguales, entonces el triángulo es isósceles y los ángulos $\angle CDE$ y $\angle CED$ son iguales. Entonces:

$$\angle CDE = \frac{180º - 144º}{2} = 18º$$

En el vértice D se cumple que:

$$\angle BDE + \angle CDE = 180º \Rightarrow \quad \angle BDE = 180º - 18º = \mathbf{162º}$$

Solución 2
Considerando el triángulo ADC tenemos:

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$$

$$68º = 32º + \angle ACD$$

$$\angle ACD = 36º$$

En el triángulo DCE, los lados DC y CE son iguales, entonces el triángulo es isósceles y los ángulos $\angle CDE$ y $\angle CED$ son iguales. Entonces:

$$\angle ACD = \angle CDE + \angle CED$$
$$36º = 2 \text{ x } \angle CDE$$
$$\angle CDE = 18º$$

En el vértice D se cumple que:

$$\angle BDE + \angle CDE = 180º \Rightarrow \qquad \angle BDE = 180º - 18º = \mathbf{162º}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por determinar el ángulo $\angle ACD$ 2 puntos
- Por determinar que $\angle CDE = \angle CED$ 1 punto
- Por determinar el ángulo $\angle CDE$ 2 puntos
- Por determinar el ángulo $\angle BDE$ 2 puntos

Problema 3
Felipe plantea a sus compañeros del 8º grado la siguiente adivinanza:
Si sumo cuatro números obtengo 80; pero además, si sumo 3 al primer número, si resto 3 al segundo número, si el tercer número lo multiplico por 3 y el cuarto número lo divido entre 3, todos esos resultados son iguales. ¿Cuál es el mayor número entre los cuatro y cuál es su valor?

Solución
Llamamos *a* , *b* , *c* y *d* a los cuatro números. Entones:

$$a + b + c + d = 80$$

$$a + 3 = b - 3 \qquad \Rightarrow \qquad b = a + 6$$

$$a + 3 = 3\,c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{a+3}{3}$$

$$a + 3 = \frac{d}{3} \qquad \Rightarrow \qquad d = 3\,(a + 3)$$

$$a + (a + 6) + \left(\frac{a+3}{3}\right) + [3\,(a + 3)] = 80$$

$$a + a + 6 + \frac{a+3}{3} + 3\,a + 9 = 80$$

$$3\,a + 3\,a + 18 + a + 3 + 9\,a + 27 = 240$$

$$16\,a = 192 \qquad \Rightarrow \qquad a = 12$$

Entonces:

$$b = a + 6 = 12 + 6 = 18$$

$$c = \frac{a+3}{3} = \frac{12+3}{3} = 5$$

$$d = 3\,(a + 3) = 3\,(12 + 3) = 45$$

El número mayor es: **45**

Observación: Del enunciado puede deducirse de diferentes maneras que d es el mayor de los números, sin necesidad de hacer cálculos. Por ejemplo, basta observar que el d es el triple de (a+3), lo que es mayor que a, mayor que b=(a+3)+3 y mayor que c=(a+3)/3.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

• Por escribir correctamente las relaciones	3 puntos
• Por determinar a (o b, o c, o d)	2 puntos
• Por determinar los otros 3 números	1 punto
• Por identificar la respuesta correcta	1 punto

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
(Alternativo)

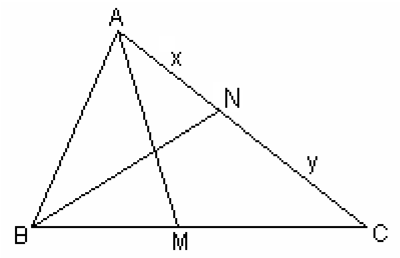
• Por escribir correctamente las relaciones	3 puntos
• Por justificar que d es el mayor de los números	2 puntos
• Por determinar d	2 puntos

Problema 4

En un triángulo ABC, AB = 18 , AC = 24 , BC = 30. Se traza la mediana AM y se toma el punto N sobre AC tal que AB/AN=BC/CN.

Determinar la razón entre las áreas de los triángulos ABM y ABN.

Solución



$$\frac{AB}{x}=\frac{BC}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{30}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{18+30}{18}=\frac{x+y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{48}{18}=\frac{24}{x}$$

$$x = 9$$

$$(ABC) = \sqrt{36\cdot 18\cdot 12\cdot 6} = 216$$

$$S=\frac{b\cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad h=\frac{S\cdot 2}{b}$$

Para el lado BC: $h = \dfrac{216\cdot 2}{30} = 14{,}4$

Para el lado AC: $h = \dfrac{216\cdot 2}{24} = 18$

$$\frac{(ABM)}{(ABN)}=\frac{\frac{15\cdot 14{,}4}{2}}{\frac{9\cdot 18}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{(ABM)}{(ABN)}=\frac{4}{3}}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por realizar el dibujo correctamente — 1 punto
- Por calcular el área del triángulo ABC — 2 puntos
- Por calcular las alturas para los lados BC y AC — 2 puntos
- Por determinar el resultado — 2 puntos

Problema 5

$$\begin{array}{r} A\ A\ B \\ A\ C\ C \\ +\ A\ D\ D \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

En la adición de la izquierda, cada letra representa un dígito. Letras iguales representan al mismo dígito, pero A, B, C y D son diferentes entre sí.
¿Cuáles son las adiciones que cumplen las condiciones del problema?

Solución 1
Considerando las cifras de las unidades tenemos dos posibilidades:

- La primera es que $B + C + D = 10$. En esto caso, al considerar las decenas tenemos:

$$A + C + D + 1 = 11 \quad ; \quad A + C + D + 1 = 21$$

En el primer caso $A + C + D = 10 \quad \Rightarrow \quad A = B$ (imposible porque $A \neq B$)

En el segundo caso $A + C + D = 20 \quad \Rightarrow \quad A - B = 10$ (imposible)

- La segunda es que $B + C + D = 20$. En este caso al considerar las decenas tenemos:

$$A + C + D + 2 = 11 \quad ; \quad A + C + D + 2 = 21$$

En el primer caso $A + C + D = 9 \quad \Rightarrow \quad B - A = 11$ (imposible)

En el segundo caso $A + C + D = 19$, pero aquí, al considerar las centenas tenemos:

$$A + A + A + 2 = 20 \quad \Rightarrow \quad 3\,A = 18 \quad \Rightarrow \quad A = 6$$

Entonces:

$$A + C + D = 19 \quad \Rightarrow \quad C + D = 13$$

$$B + C + D = 20 \quad \Rightarrow \quad B = 7$$

Con respecto a C y D las posibilidades son:

$6 + 7 = 13$ (no)
$5 + 8 = 13$
$4 + 9 = 13$

Y las adiciones son:

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ 6\ 5\ 5 \\ +\ 6\ 8\ 8 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ 6\ 8\ 8 \\ +\ 6\ 5\ 5 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ 6\ 4\ 4 \\ +\ 6\ 9\ 9 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ 6\ 9\ 9 \\ +\ 6\ 4\ 4 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Solución 2
Llamemos ac1 y ac2 a los acarreos de las sumas parciales B + C + D (unidades) y A + C + D (decenas) respectivamente.
Como se suman tres dígitos diferentes, la máxima suma posible es $9 + 8 + 7 = 24$, por lo tanto, los valores posibles de ac1 y ac2 son 0, 1, 2.

Tomando en cuenta la suma de las centenas tenemos que:

$$A + A + A + ac2 = 20 \quad \rightarrow \quad 3A + ac2 = 20.$$

En caso que $A \leq 5 \quad \rightarrow \quad ac2 \geq 5$ (no cumple con la condición)

En caso que $A = 6 \quad \rightarrow \quad ac2 = 2$

En caso que $A \geq 7 \quad \rightarrow \quad ac2 \leq -1$ (no cumple con la condición)

Por lo tanto **A = 6** y ac2 = 2.

Considerando la suma de las decenas:

$$A + C + D + ac1 = 6 + C + D + ac1 = 21 \text{ (ya que el acarreo debe ser 2)}$$

Por lo tanto $C + D + ac1 = 15$.

El valor mínimo de $C + D = 13$ (cuando $ac1 = 2$)

Por otro lado, la suma de las unidades $B + C + D = 10 + ac1$

Con estas últimas dos ecuaciones, llenamos la siguiente tabla a partir de los posibles valores de ac1.

	C + D = 15 – ac1	B + C + D = 10 x ac1	
ac1 = 1	14	B + 14 = 10	implica que B = -4
ac1 = 2	13	B + 13 = 20	**B = 7**

Por lo tanto, el único valor posible es B = 7.

Los posibles valores para C y D son:

4 y 9 → si
5 y 8 → si
6 y 7 → no pueden tomar estos valores porque A = 6 y B = 7

Considerando estos resultados, las posibles combinaciones son:

A = 6 ; B = 7 ; C = 4 ; D = 9 ;
A = 6 ; B = 7 ; C = 9 ; D = 4 ;
A = 6 ; B = 7 ; C = 5 ; D = 8 ;
A = 6 ; B = 7 ; C = 8 ; D = 5

Y las adiciones son:

$$\begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ +\ 6\ 5\ 5 \\ 6\ 8\ 8 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ +\ 6\ 8\ 8 \\ 6\ 5\ 5 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ +\ 6\ 4\ 4 \\ 6\ 9\ 9 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ 6\ 7 \\ +\ 6\ 9\ 9 \\ 6\ 4\ 4 \\ \hline 2\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por determinar el valor de A — 2 puntos
- Por determinar el valor de B — 2 puntos
- Por determinar los posibles valores de C + D — 1 punto
- Por determinar los posibles valores de C y D — 1 punto
- Por especificar correctamente las cuatro posibles soluciones — 1 punto