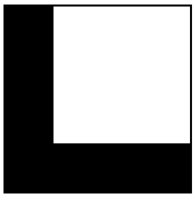
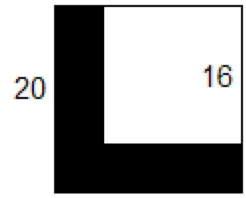
RONDA FINAL 2010 – NIVEL 1

Problema 1



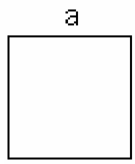
En la figura se ven dos cuadrados. El lado del cuadrado mayor mide 20 y el lado del cuadrado que está en el interior 16.
Petrona construyó otro cuadrado, cuya área es igual al área de la superficie que está pintada de negro en la figura.
¿Cuál será el lado del cuadrado construido por Petrona?

Solución



El área pintada de negro es:

$$20^2 - 16^2 = 144$$



Llamamos **a** al lado del cuadrado que construyó Petrona, entonces:

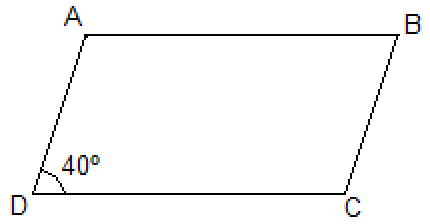
$$\mathbf{a}^2 = 144$$

Entonces, como $12^2 = 144$, $\mathbf{a} = \mathbf{12}$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por determinar el área del cuadrado mayor — 1 punto
- Por determinar el área pintada de negro — 2 puntos
- Establecer la relación $\mathbf{a}^2 = 144$ — 2 puntos
- Por determinar la respuesta correcta — 2 puntos

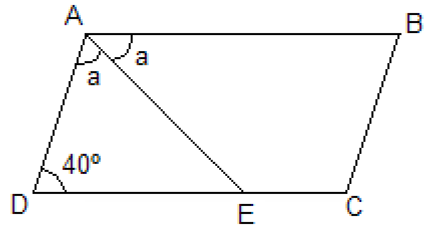
Problema 2



Raquel dibuja un paralelogramo ABCD con $\angle ADC = 40°$.

Luego traza la bisectriz del ángulo $\angle DAB$ que corta al lado DC en el punto E (E entre D y C).
Demostrar que el triángulo ADE es isósceles.

Solución



Calculamos primero la medida del ángulo DAB:

$$\angle DAB = 180º - 40º = 140º$$

Como AE es bisectriz de $\angle DAB$, tenemos:

$$a = 70º$$

En el triángulo ADE:

$$\angle AED = 180º - (40º + 70º) = 70º \quad \Rightarrow \quad \angle AED = \angle DAE$$

Por lo tanto el triángulo ADE es isósceles.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por trazar la bisectriz correctamente 1 punto
- Por calcular la medida del ángulo $\angle DAB$ 1 punto
- Por calcular la medida del ángulo $\angle DAE$ 1 punto
- Por calcular la medida del ángulo $\angle AED$ 2 puntos
- Por concluir que el triángulo es isósceles 2 puntos

Solución 2

AB es paralela a DC por ser un paralelogramo. Como AB es paralela a DC y AE es una transversal, el ángulo $\angle AED = a$, por ser ángulos alternos internos.

Por lo tanto el triángulo ADE es isósceles.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por trazar la bisectriz correctamente 1 punto
- Indicar AB paralelo a DC 1 punto
- Por usar correctamente A.A.I. (o análogo) 3 puntos
- Por concluir que el triángulo es isósceles 2 puntos

Problema 3

¿Qué valores debe tener C para que se cumpla la siguiente adición? (Letras diferentes representan dígitos diferentes)

$$\begin{array}{r} D\,O\,S \\ +\,D\,O\,S \\ D\,O\,S \\ \hline O\,C\,H\,O \end{array}$$

Solución

Como en la suma de las centenas puede "llevarse" 1 ó 2, los valores de O pueden ser 1 ó 2.

Si O vale 1, tenemos:

$$\begin{array}{r} D\,1\,S \\ +\,D\,1\,S \\ D\,1\,S \\ \hline 1\,C\,H\,1 \end{array}$$

Vemos que S debe ser necesariamente 7 porque 7 × 3 = 21. Entonces, el valor de H es 5.

$$\begin{array}{r} D\,1\,7 \\ +\,D\,1\,7 \\ D\,1\,7 \\ \hline 1\,C\,5\,1 \end{array}$$

Como O = 1, entonces 10 ≤ 3D ≤ 19. Así, los valores posibles para D son: 4 , 6 (el valor 5 no es posible porque H = 5).Para D = 4, C = 2. Para D = 6, C = 8.

Si O = 2, tenemos:

$$\begin{array}{r} D\,2\,S \\ +\,D\,2\,S \\ D\,2\,S \\ \hline 2\,C\,H\,2 \end{array}$$

Vemos que S debe ser necesariamente 4 porque 4 × 3 = 12. Entonces, el valor de H es 7.

$$\begin{array}{r} D\,2\,4 \\ +\,D\,2\,4 \\ D\,2\,4 \\ \hline 2\,C\,7\,2 \end{array}$$

Como O = 2, entonces 20 ≤ 3D ≤ 29. El 7 no es posible porque H = 7; el 8 no es posible porque daría 8 × 3 = 24 y S vale 4; el 9 no es posible porque daría 9 × 3 = 27 y H = 7. Por tanto, no hay un solo valor posible para D.

La respuesta es: **2** y **8**

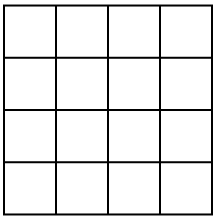
CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por establecer posibles valores de O — 2 puntos
- Por explorar y determinar los valores para el resto de las letras cuando O = 1
  - Por determinar los valores de S y H — 1 punto
  - Por establecer los 2 posibles valores para D — 1 punto
  - Por determinar valores para C — 1 punto
- Por explorar y descartar los valores para el resto de las letras cuando O = 2
  - Por determinar los valores de S y H — 1 punto
  - Por determinar que no hay posibles valores para D ni C — 1 punto

Observación:

Por encontrar el resultado sin criterio aparente — máximo 2 puntos

Problema 4



Juana tiene muchos cuadraditos de madera en su mesa y con algunos de ellos arma cuadrados más grandes, como por ejemplo el de la figura.
Cuando trata de construir cierto cuadrado grande, le faltan 7 cuadraditos para poder completar su construcción.
Entonces construye el cuadrado anterior (con un cuadradito menos en el lado), y le sobran 10 cuadraditos.
¿Cuántos cuadraditos tenía Juana sobre la mesa?

Solución 1
Llamamos **a** a la cantidad de cuadraditos que tiene en cada lado el cuadrado que no pudo construir y **b** a la cantidad de cuadraditos en cada lado del cuadrado anterior. Entonces:

$$\mathbf{a}^2 - 7 = \mathbf{b}^2 + 10 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + 17$$

Los valores de $\mathbf{b}^2$ pueden ser: 1 , 4 , 9 , 16 , . . .

Entonces, debemos buscar cuáles de esos números de la serie, al sumar con 17 da un cuadrado perfecto, puesto que será el valor de $\mathbf{a}^2$.

Vemos que:

$1 + 17 = 18$
$4 + 17 = 21$
$9 + 17 = 26$
$16 + 17 = 33$
$25 + 17 = 42$
$36 + 17 = 53$
$49 + 17 = 66$
$64 + 17 = 81$

Luego, la cantidad de cuadraditos que tenía Juana es:

$$\mathbf{a}^2 - 7 = 81 - 7 = \mathbf{74} \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{b}^2 + 10 = 64 + 10 = \mathbf{74}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por relacionar la cantidad de cuadraditos de las construcciones cuando le faltaban y sobraban piezas — 3 puntos
- Por determinar posibles valores de $\mathbf{b}^2$ (o $\mathbf{a}^2$) — 1 punto
- Por explorar valores para $\mathbf{a}^2$ (o $\mathbf{b}^2$) — 1 punto
- Por determinar el valor de $\mathbf{a}^2$ (o $\mathbf{b}^2$) — 1 punto
- Por determinar la cantidad de piezas disponibles — 1 punto

Solución 2

Llamamos a a la cantidad de cuadraditos que tiene en cada lado el cuadrado que no pudo construir y x la cantidad de cuadrados que tenía Juana sobre la mesa.

Entonces, para el caso en que no pudo construir el cuadrado, a y x se relacionan con la expresión:

$$a^2 - 7 = x$$

Para el caso en que le sobraron fichas, a y x se relacionan con la expresión:

$$(a - 1)^2 + 10 = x$$

Igualando las ecuaciones, tenemos que:

$$a^2 - 7 = (a - 1)^2 + 10$$

$$a^2 - 7 = a^2 - 2\,a + 1 + 10$$

$$2\,a = 1 + 10 + 7$$

$$a = 18 \div 2$$

$$a = 9$$

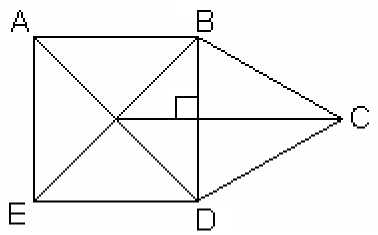
Luego, la cantidad de cuadraditos sobre la mesa es:

$$9^2 - 7 = (9 - 1)^2 + 10 = \mathbf{74}$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

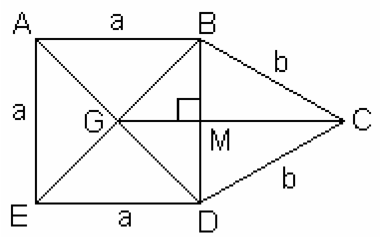
• Por relacionar la cantidad de cuadraditos de las construcciones cuando le faltaban y sobraban piezas	3 puntos
• Por determinar el valor de a	3 puntos
• Por determinar la cantidad de piezas disponibles	1 punto

Problema 5



En el dibujo, ABDE es un cuadrado.
El perímetro de la figura ABCDE es 48.
Los lados del cuadrado ABDE y del triángulo BCD tienen como medidas números enteros.
Hallar todos los posibles valores para el área del cuadrado ABDE.

Solución



Llamamos G al punto de intersección de las diagonales del cuadrado. Como GC es perpendicular a BD, M es el punto medio del lado BD.

En el triángulo BDC, CM es la altura pero también es mediatriz, por lo tanto el triángulo BDC es isósceles.

Llamamos *a* a la medida de los lados del cuadrado ABDE y *b* a la de los lados iguales del triángulo BDC. Entonces tenemos:

$$3\,a + 2\,b = 48 \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{48 - 3\,a}{2}$$

Esto significa que $48 - 3\,a$ debe ser múltiplo de 2 o sea que a debe ser múltiplo de 2.

Listamos los posibles valores de a y el correspondiente valor de b:

A	2	4	6	8	10	12	14
B	21	18	15	12	9	6	3

Para que el triángulo BCD exista se debe cumplir $a < 2\,b$.

Por tanto, los valores posibles de a son: 2 , 4 , 6 , 8 , 10.

Entonces, los valores posibles del área del cuadrado son:

4 , 16 , 36 , 64 , 100

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Por hacer sólo exploraciones con posibles medidas (no acumulables) — hasta 2 puntos

- Por demostrar que el triángulo BDC es isósceles — 2 puntos
  - (Asume que BDC es isósceles pero NO demuestra) — 1 punto
- Por usar el perímetro para relacionar a y b — 1 punto
- Por listar valores posibles de los lados (Ver Obs.) — 2 puntos
- Por eliminar los valores que no cumplen con la condición $a < 2b$ — 1 punto
- Por la respuesta correcta — 1 punto

Obs: Debe justificar por qué analizó sólo valores pares para a, o de lo contrario analizar también valores impares. Caso contrario, pierde 1 punto.